

Divisibilité, nombres premiers.

1 Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

Définition 1.1 Soit a et b deux entiers relatifs.

Si il existe un entier relatif k tel que $a = kb$, on dit que a est un multiple de b .

Si de plus $b \neq 0$, on dit que b est un diviseur de a . Dans ce cas, on dit également que a est divisible par b , ou que b divise a .

Exemple(s) 1.1

Définition 1.2 soit $a \in \mathbb{Z}$.

➡ On dit que a est pair, si il existe un entier relatif $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 2k$. Autrement dit a est divisible par 2.

➡ On dit que a est impair, si il existe un entier relatif $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 2k + 1$.

Exemple(s) 1.2

Propriété 1.1

Soit $a \in \mathbb{Z}$ (un entier relatif)

- ❑ a est un nombre pair alors a^2 est pair.
- ❑ a est un nombre impair alors a^2 est impair.

Inversement, nous avons aussi :

- ❑ a^2 est un nombre pair alors a est pair.
- ❑ a^2 est un nombre impair alors a est impair.

On peut résumer tout cela par :

a est impair si et seulement si a^2 est impair.

Ou bien

a est pair si et seulement si a^2 est pair

DEMONSTRATIONS :

□ a est un nombre pair alors a^2 est pair.

□ a est un nombre impair alors a^2 est impair.

□ a^2 est un nombre pair alors a est pair.

□ a^2 est un nombre impair alors a est impair.

Propriété 1.2

- ❖ Si a divise b ($a \neq 0$) et si b ($b \neq 0$) divise c , alors a divise c .
- ❖ Si a divise b alors $-a$ divise b .
- ❖ Soit $a, b \neq 0$, si a divise b et b divise a , alors $a = b$ ou $a = -b$.

DEMONSTRATIONS :

$$\left. \begin{array}{l} \text{❖ } a \neq 0 \text{ et } b \neq 0 \\ a|b \text{ et } b|c \end{array} \right\} \Rightarrow a|c.$$

$$\text{❖ } a|b \Rightarrow (-a)|b$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{❖ } a \neq 0 \text{ et } b \neq 0 \\ a|b \text{ et } b|a \end{array} \right\} \Rightarrow a = b \text{ ou } a = -b.$$

Propriété 1.3 Soit a, b et c trois entiers naturels avec $c \neq 0$.

1. Si c divise a et b , **alors** c divise $a + b$.
2. Si c divise a et b , **alors** c divise $a - b$.

Démonstration :

2 Nombres premiers.

Définition 2.1 $\rightarrow$ Un entier naturel distinct de 1 $p \neq 1$ est premier s'il admet exactement deux diviseurs (dans $\mathbb{N}$), 1 et lui-même.

$\Rightarrow$ un entier distinct de 1 et non premier est dit composé.

Exemple(s) 2.1

Propriété 2.1 Test de primalité

*Si un entier n n'est divisible par aucun nombre premier inférieur à sa racine carrée, il est alors premier.
Cette propriété est admise en classe de seconde.*

Exemple(s) 2.2