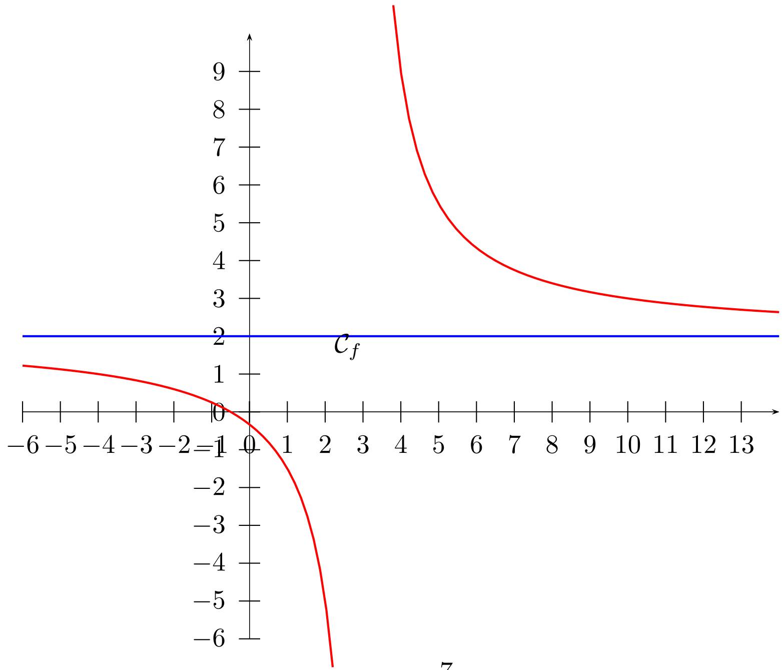
Activité : Asymptote horizontale à la courbe représentative d'une fonction.

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{3\}$ par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$. Voici ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de f. On souhaite étudier le comportement de f(x) lorsque x prend de grandes valeurs positives.



1. Démontrer que pour tout $x \neq -3$, $f(x) = 2 + \dfrac{7}{x-3}$.
2. Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	50	100	1000	10000	100000	1000000
$f(x)$						

3. Compléter la conjecture suivante :
Plus x tend vers ......, plus $f(x)$ semble tendre vers la valeur ...... et plus la courbe $\mathcal{C}_f$ semble se rapprocher indéfiniment de la droite $\Delta : y =$ ......
4. Démontrer que pour tout réel $x > 7 \times 10^n + 3$ alors $2 < f(x) < 2 + 10^{-n}$.
Par ce biais, on démontre que la courbe $\mathcal{C}_f$ peut être aussi proche de Δ que l'on veut, pourvu que x prenne des valeurs positives suffisamment grandes.
On dit que la limite de $f(x)$ est 2 quand x tend vers $+\infty$ et on note

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +2.$$

5. On souhaite étudier le comportement de $f(x)$ lorsque x prend de très grandes valeurs négatives.
Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	-50	-100	-1000	-10000	-100000	-1000000
$f(x)$						

6. Compléter la conjecture suivante :
Plus x tend vers ......, plus $f(x)$ semble tendre vers la valeur ...... et la courbe $\mathcal{C}_f$ semble se rapprocher indéfiniment de la droite $\Delta : y =$ ......
7. Démontrer que pour tout réel $x < -7 \times 10^n + 3$ alors $2 - 10^{-n} < f(x) < 2$.
Par ce biais, on démontre que la courbe $\mathcal{C}_f$ peut être aussi proche de Δ que l'on veut, pourvu que x prenne des valeurs négatives de valeurs absolues suffisamment grandes.
Autrement dit, on peut rendre $f(x)$ aussi proche de 2 que l'on veut, pourvu que x tende vers $-\infty$.
On dit que la limite de $f(x)$ est 2 quand x tend vers $-\infty$ et on note

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2.$$