Devoir de Mathématique n°1

Donné le ...... pour le ....

Exercice 0.1 *On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{5u_n}{3u_n + 5}$.*

1. *A l'aide d'un* ***tableur****, conjecturer sur les variations de la suite, laisser une trace de votre travail !*
2. *Démontrer par* ***récurrence*** *que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n > 0$.*
3. *Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.*

Exercice 0.2 *On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur $\mathbb{N}^\star$ par :*

$$u_1 = \frac{1}{2}, \quad \text{et, pour tout entier naturel } n \quad \text{non nul, } u_{n+1} = \frac{n+1}{2n}u_n.$$

1. *Calculer u_2, u_3 et u_4.*
2. (a) *Démontrer que pour tout entier naturel non nul, u_n est stictement positif.*
   (b) *Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.*
3. *Pour tout entier naturel n non nul, on pose :*

$$v_n = \frac{u_n}{n}.$$

   (a) *Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.*
   On précisera sa raison et son premier terme v_1.
   (b) *En déduire que pour tout entier naturel n non nul on a :*

$$u_n = \frac{n}{2^n}.$$

Exercice 0.3 *Soit la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$, $u_2 = -5$ et pour tout $n \geq 1$ par*

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n.$$

1. *Calculer u_3, u_4 et u_5.*
2. *Démontrer que pour tout entier $n \geq 2$ on a :*

$$u_n = 4 \times 2^n - 7 \times 3^{n-1}.$$