Devoir surveillé de Mathématiques n 3 (durée=2h)

Exercice 0.1 *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par* $f(x) = x^5 + \frac{25}{3}x^4 + \frac{20}{3}x^3 - 80x^2 + 8x + 1$.

❒ *Calculer* $f''(x)$.

❒ *Montrer que* $f"(x) = 20(x-1)(x+2)(x+4)$.

❒ *Etudier le signe de* $f''(x)$ *et en déduire l'étude de la convexité de* f. *Donner les abscisses des points d'inflexion.*

❒ *Donner une équation de la tangente à* $\mathcal{C}_f$ *au point d'abscisse* -1.

Exercice 0.2 *On considère la fonction g deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ par* $g(x) = x^2e^{-x}$.

▼ *Calculer* $g'(x)$.

▼ *Calculer* $g''(x)$.

▼ *Etudier la convexité de g, donner les coordonnées des points d'inflexion de g.*

▼ *Donner une équation de la tangente à* $\mathcal{C}_g$ *au point d'abscisse* 1.

Exercice 0.3 *On donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction f', fonction dérivée de la fonction f définie sur* $[-3; 1]$.

x	-3		-2		0		1
variations de $f'(x)$	-5	$\nearrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3

❖ *Déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe et celui sur lequel elle est concave.*

❖ *On suppose qu'il existe un nombre* $0 < \alpha < 1$ *tel que* $f'(\alpha) = 0$.

❒ *Donner le tableau de signes de* $f'(x)$;

❒ *Donner le tableau de variations de* f.

Exercice 0.4 *Soit h la fonction définie par* $h(x) = \sqrt{3x^2 + x - 10}$.

❒ *Déterminer l'ensemble de définition de h. En déduire l'ensemble de dérivation de h, on nommera cet ensemble I.*

❒ *Montrer que* $h''(x) = \dfrac{-121}{4(3x^2+x-10)\sqrt{3x^2+x-10}}$.

❒ *On restreint l'étude de h sur* $[4; 10]$. *Etudier la convexité de h sur* $[4; 10]$.

Exercice 0.5 *Un groupe de presse édite un magazine. Une étude montre que* 10% *des abonnés passent de la version papier à la version numérique et* 6% *passent du numérique au papier. On note a_n la* ***proportion*** *d'abonnés ayant choisi la version papier l'année 2020+n et b_n la* ***proportion*** *pour le numérique. On admet que le nombre d'abonnés est constant on a donc pour* $n \in \mathbb{N}$ $a_n + b_n = 1$, $a_0 = 1$ *et* $b_0 = 0$.

▲ *Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :* $a_{n+1} = 0,9a_n + 0,06b_n$.

▲ *En déduire que* $a_{n+1} = 0,84a_n + 0,06$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

▲ *Posons* $c_n = a_n - 0,375$.

- *Montrer que* (c_n) *est géométrique.*
- *En déduire l'expression de c_n en fonction de n.*
- *En déduire l'expression de a_n et b_n en fonction de n.*
- *Donner la limite de la suite* (a_n).