Fonction exponentielle.

Théorème 0.1 *Il existe une* ***unique*** *fonction f, dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :*

$$f'(x) = f(x) \qquad et \qquad f(0) = 1.$$

De plus pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) > 0$.

Definition 0.1 *La fonction du théorème 1.1 est appelée fonction* ***exponentielle*** *et est notée :*

$$\exp : x \to \exp(x).$$

1 Propriétés algébriques de la fonction exponentielle.

Proposition 1.1 *Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et pour tout $b \in \mathbb{R}$ on a :*

$$\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b).$$

Démonstration :

Proposition 1.2 *Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et pour tout $b \in \mathbb{R}$ on a :*

$$\exp(a-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)} \qquad \exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}$$

Démonstration :

Proposition 1.3 *Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a :*

$$\exp(n \times a) = \Big[\exp(a)\Big]^n.$$

Démonstration par **récurrence** :

1.1 Nouvelle notation de la fonction exponentielle.

Remarque(s) 1.1

$e^0 = 1$	$e^1 = e$	$e^{-1} = \dfrac{1}{e}$
$e^{a+b} = e^a \times e^b$	$e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$	$e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$

Savoir-faire 1.1 ① *Exprimer en fonction du nombre e chacun des nombre suivants :*

$A = \exp(-2)$ $\quad B = \exp(0.8)\exp(1)\exp(1.2)$ $\quad C = \dfrac{\exp(1,23)}{\exp(0,23)}$

② *Simplifier chacune des expressions suivantes :*

$D = \dfrac{e^{1,5}}{e}$ $\quad E = (e^{0,5})^4 \times e^{-1}$ $\quad F = (e^x \times e^{-x})^2$

$G = \left(\dfrac{e^{1+0,25x}}{e^{1-0,25x}}\right)^2$

2 Etude de la fonction exponentielle.

2.1 variations de $x \to e^x$.

Théorème 2.1 *1. La fonction exponentielle est strictement positive.*

2. La fonction exponentielle est dérivable et continue sur $\mathbb{R}$.

3. La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

DEMONSTRATION :
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $exp^{'}(x) = exp(x)$ or nous savons que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $exp(x) > 0$. Donc la fonction exponentielle est stritement croissante sur $\mathbb{R}$.

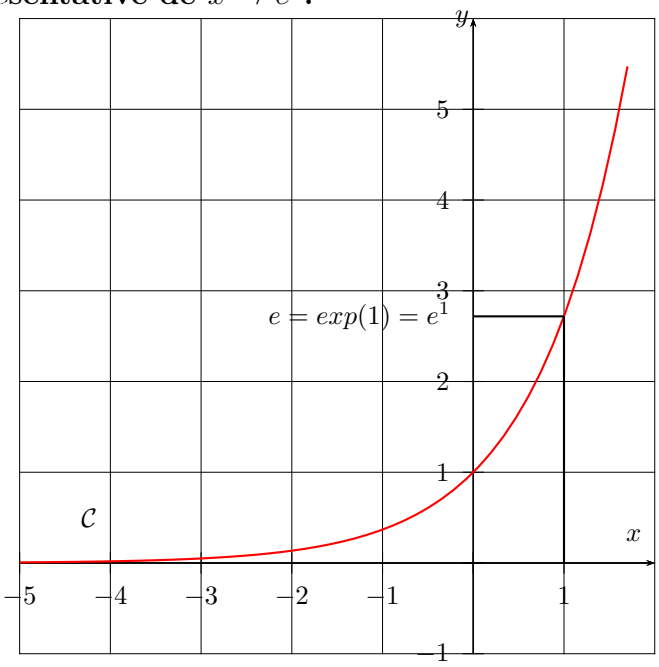
2.2 Limites à l'infini.

Théorème 2.2

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0.$$

Démonstration : Démonstration à savoir refaire(ROC)

2.3 Courbe représentative de $x \to e^x$.



3 Croissance comparée de e^x et x.

Théorème 3.1 *Nous avons les limites suivantes :*

1. $$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.$$

2. $$\lim_{x \to -\infty} x \times e^x = 0.$$

3. $$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

DEMONSTRATION :

4 Etude d'une fonction contenant e^x.

Savoir-faire 4.1 ***Factorisation d'une expression comportant des exponentielles.*** *factoriser au possible chacune des expressions suivantes.*

$f(x) = e^{2x} + e^x$ $\quad$ $g(x) = xe^x + 3e^x$ $\quad$ $h(x) = xe^{2x} + xe^x$

Savoir-faire 4.2 ***Dériver une fonction faisant intervenir la fonction exponentielle.***
Dériver chaque fonction sur $\mathbb{R}$.

$g(x) = 1 + 2x + 3e^x$ $\quad$ $(1 + x) \times e^x$ $\quad$ $l(x) = \dfrac{e^x}{1 + e^x}$

5 Résolution des équations de la forme $e^{f(x)} = e^{g(x)}$.

Théorème 5.1 *Soit A et B deux nombres réels.*
L'équation $e^A = e^B$ équivaut à $A = B$.

Exemple(s) 5.1 — *Résoudre l'équation $e^{2x} = e^{-3x+1}$.*
— *Résoudre l'équation $e^{2x+1} = 1$ indication$(e^0 = 1)$.*

6 Résolution d'inéquations de la forme $e^{f(x)} < e^{g(x)}$.

Théorème 6.1 *Soit A et B deux nombres réels.*
L'inéquation $e^A \leq e^B$ équivaut à $A \leq B$.

Exemple(s) 6.1 — *Résoudre l'inéquation $e^x > e^{-2x+1}$.*
— *Résoudre l'inéquation $e^{-x+3} \geq 1$ indication$(e^0 = 1)$.*

Exemple(s) 6.2 *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par $f(x) = x \times e^x$.*

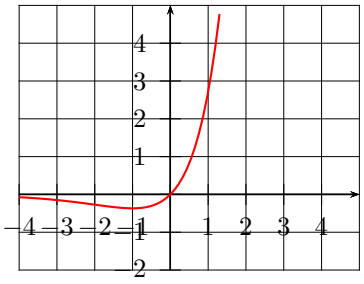
1. *Calculons $f'(x)$ et factorisons de $f'(x)$.*

2. *Etude du signe de $f'(x)$.*

3.

x	
Signe de e^x	
Signe de $(x+1)$	
Signe de $f'(x)$	
Variations de f	

4. *Voici $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f, elle permet de confirmer nos calculs.*



7 Fonction $x \to (exp \circ u)(x) = e^{u(x)}$.

Definition 7.1 *Soit u une fonction définie sur un intervalle I alors la fonction $f = e^u$ est la fonction définie sur I par :*

$$f(x) = e^{u(x)}.$$

Théorème 7.1 *Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, la fonction définie sur I par $f(x) = exp[u(x)] = e^{u(x)}$ est dérivable sur I et pour tout réel $x \in I$ on a :*

$$f'(x) = u'(x) \times e^{u(x)}.$$

Exemple(s) 7.1 *Dériver chaque fonction sur l'intervalle I donné.*

$f(x) = e^{-0,5x}$ $I = \mathbb{R}$ $g(x) = x + e^{-3x}$ $I = \mathbb{R}$ $h(x) = e^{x^2}$ $I = \mathbb{R}$

Savoir-faire 7.1 ***Une fonction importante pour les probabilités !***

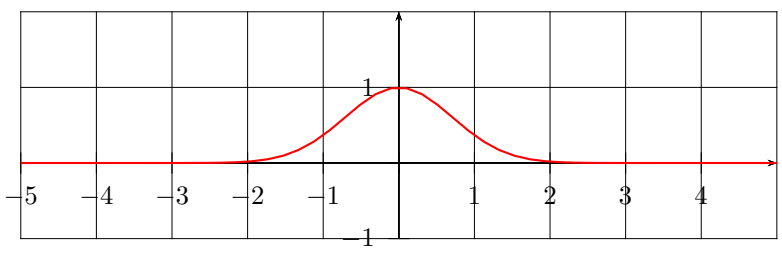
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par $f(x) = e^{-x^2}$.

1. *Calculons $f'(x)$.*

2. *Etude du signe de $f'(x)$, variations de f.*

x	
Signe de e^{x^2}	
Signe de $-2x$	
Signe de $f'(x)$	
Variations de f	

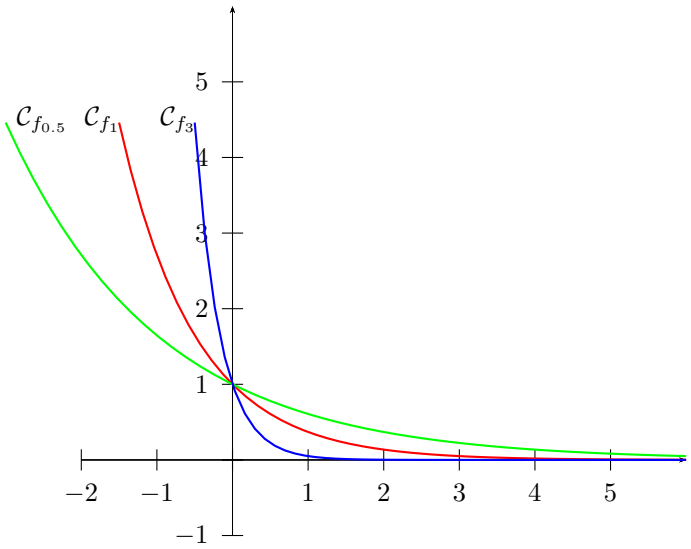
3. *Voici $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f, elle permet de confirmer nos calculs.*



8 Fonctions $x \to e^{u(x)}$ particulières.

8.1 Fonctions $f_k : x \to e^{-kx}$ avec $k > 0$.

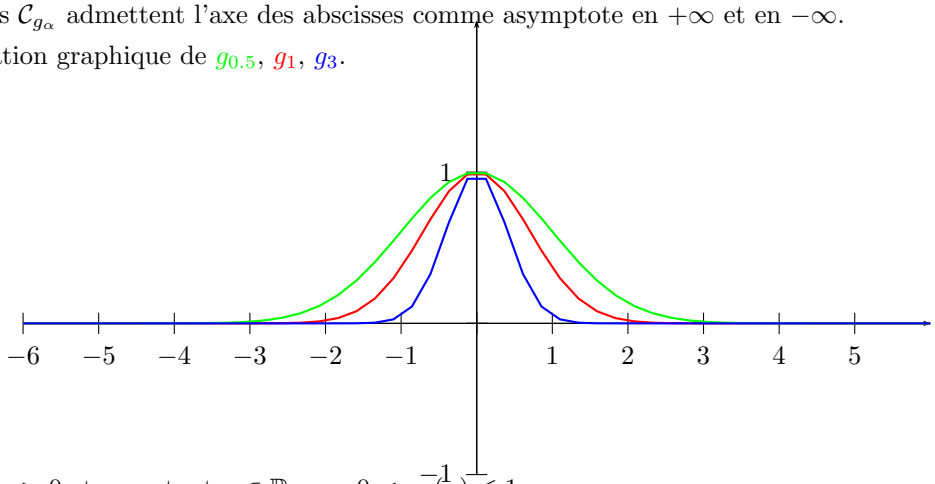
1. Les fonctions f_k sont dérivables sur $\mathbb{R}$ puisque elles sont les composées de la fonction $x \to exp(x)$ et des fonctions affines $x \to kx$ qui sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
   Calculons $f_k^{'}(x)$.
   $$f_k^{'}(x) = -ke^{-kx} < 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$
   Donc les fonctions f_k sont strictements décroissantes sur $\mathbb{R}$.
2. On a pour tout $k \in]0; +\infty[$ d'après le théorème de composition des limites.
   $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty}(-kx) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} e^{-kx} = +\infty.$$
   On a aussi pour tout $k \in]0; +\infty[$ d'après le théorème de composition des limites.
   $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty}(-kx) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} e^{-kx} = 0.$$
3. Les courbes $\mathcal{C}_{f_k}$ admettent l'axe des abscisses comme asymptote en $+\infty$.
4. Représentation graphique de $f_{0.5}$, f_1, f_3.



8.2 Courbes de Gauss, Fonctions $g_\alpha : x \to e^{-\alpha x^2}$ avec $\alpha > 0$.

1. Les fonctions g_α sont dérivables sur $\mathbb{R}$ puisque elles sont les composées de la fonction $x \to exp(x)$ et des fonctions $x \to -\alpha x^2$ qui sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
   Calculons $g_\alpha^{'}(x)$.
   $$g_\alpha^{'}(x) = -2\alpha x e^{-\alpha x^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$
   Puisque $e^{-\alpha x^2} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, le nombre dérivé $g_\alpha^{'}(x)$ est du signe de $-\alpha x$. Donc g_α est strictement croissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.
2. On a pour tout $\alpha \in]0; +\infty[$ d'après le théorème de composition des limites.
   $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty}(-\alpha x^2) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} e^{-\alpha x^2} = 0.$$
   On a aussi pour tout $\alpha \in]0; +\infty[$ d'après le théorème de composition des limites.
   $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty}(-\alpha x^2) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} e^{-\alpha x^2} = 0.$$

3. Les courbes $\mathcal{C}_{g_\alpha}$ admettent l'axe des abscisses comme asymptote en $+\infty$ et en $-\infty$.
4. Représentation graphique de $g_{0.5}$, g_1, g_3.



5. Pour tout $\alpha > 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $0 < g_\alpha(x) \leq 1$.