Fonctions affines, équations et inéquations produits.

I Définition et représentation graphique

Définition 1
a et b sont deux réels donnés.
La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ est appelée fonction affine, elle est représentée par une droite où

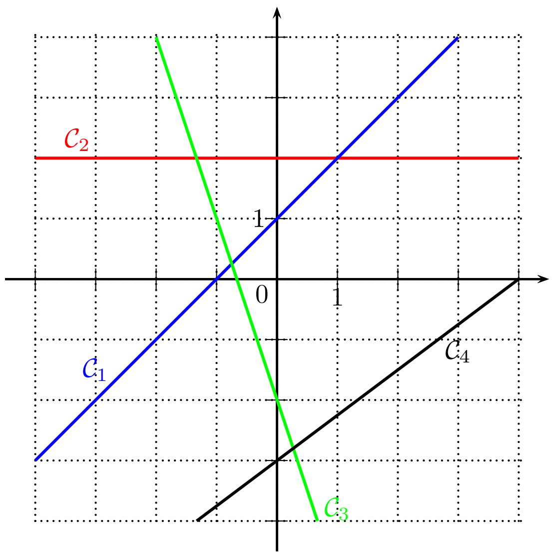
- *Le réel a est le coefficient directeur de cette droite,*
- *Le réel b est l'ordonnée à l'origine.*

Dans le cas où $b = 0$, la fonction est appelée fonction linéaire, représentée par un droite passant par l'origine.

Remarque 1
Contrairement à n'importe quelle fonction, pour tracer la courbe représentative de f une fonction affine, il suffit de donner deux points de cette courbe repréentative que l'on place dans le repère et de les relier à la règle.

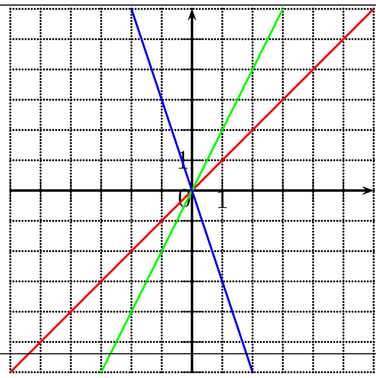
Exemple 1
Représentons graphiquement les fonctions affines suivantes :

- $\mathcal{C}_1 : f(x) = x + 1,$
- $\mathcal{C}_2 : f(x) = 2,$
- $\mathcal{C}_3 : f(x) = -3x - 2,$
- $\mathcal{C}_4 : f(x) = \dfrac{3}{4}x - 3.$



Exemple 2
Représentons graphiquement les fonctions linéaires suivantes :

- $\mathcal{C}_1 : f(x) = x,$
- $\mathcal{C}_2 : f(x) = 2x,$
- $\mathcal{C}_3 : f(x) = -3x,$



II Sens de variation

Proposition 1
Soit f une fonction affine définie par $f(x) = ax + b$, alors :

- *Si $a > 0$, f est croissante sur $\mathbb{R}$,*
- *Si $a < 0$, f est décroissante sur $\mathbb{R}$,*
- *Si $a = 0$, f est constante sur $\mathbb{R}$.*

Exemple 3

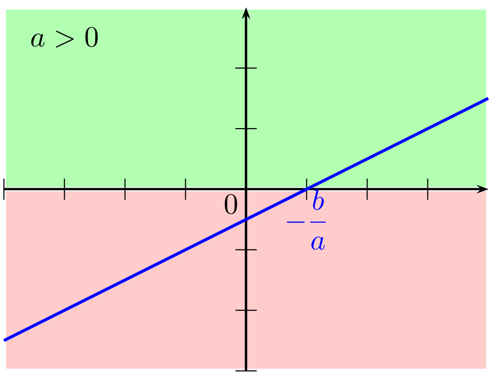
- La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \boxed{3}\ x + 2$ est croissante,
- La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \boxed{\text{-2}}\ x + 3$ est décroissante,
- La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5$ est constante ; car $\boxed{a = 0}$.

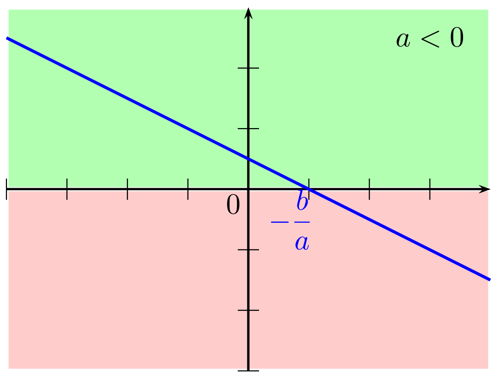
III Signe de $ax + b$

Suivant le signe du coefficient directeur a, on obtient les tableaux de signes suivants :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
variations	$\nearrow$	0	$\nearrow$
signe de $ax+b$	$-$	0	$+$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
variations	$\searrow$	0	$\searrow$
signe de $ax+b$	$+$	0	$-$





Exemple 4
Tableau de signes des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 4$ et $g(x) = -x + 3$:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
variations de f	$\nearrow$	0	$\nearrow$
signe de $2x+4$	$-$	0	$+$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
variations de g	$\searrow$	0	$\searrow$
signe de $-x+3$	$+$	0	$-$

RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS PRODUIT $A(x) \times B(x) = 0$.

IV Équation produit

Théorème 1
Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul :

$$f(x) \times g(x) = 0 \Longleftrightarrow f(x) = 0 \quad ou \quad g(x) = 0.$$

Exercice 1
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(x+1)(2x+4) - (x-7)(x+1) = 0$

$$(x+1)(2x+4) - (x-7)(x+1) = 0$$
$$\Leftrightarrow (x+1)[(2x+4) - (x-7)] = 0$$
$$\Leftrightarrow (x+1)(x+11) = 0$$
$$\Leftrightarrow x+1 = 0 \quad ou \quad x+11 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = -1 \quad ou \quad x = -11$$
$$\Leftrightarrow \mathcal{S} = \{-11; -1\}.$$

Théorème 2
$\boxed{\textit{L'équation } x^2 = a}$ *possède :*

- ♦ *deux solutions si $a > 0$: $\mathcal{S} = \{-\sqrt{a}; \sqrt{a}\}$,*
- ♦ *une solution si $a = 0$, on a $\mathcal{S} = \{0\}$,*
- ♦ *aucune solution si $a < 0$, on a $\mathcal{S} = \emptyset$.*

DEMONSTRATION :

1. Si $a < 0$, nous savons que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on $x^2 \geq 0$, donc il n'existe pas de solution, on écrit cela $\mathcal{S} = \emptyset$.
2. si $a > 0$ on sait que $a = (\sqrt{a})^2$. On a donc :
$$x^2 = a \Leftrightarrow x^2 - a = 0 \Leftrightarrow x^2 - (\sqrt{a})^2 = 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) = 0$$
$$\Leftrightarrow x - \sqrt{a} = 0 \quad ou \quad x + \sqrt{a} = 0$$
$$\Leftrightarrow x = \sqrt{a} \quad ou \quad x = -\sqrt{a}$$
3. Si $a = 0$ on a : $x^2 = 0 \Leftrightarrow x \times x = 0 = 0 \quad ou \quad x = 0$. Donc $x = 0$ est la solution de l'équation.

Exemple 5
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $E : (x+2)^2 - 9 = 0$ de deux manières différentes

➜ $E \iff (x+2)^2 = 9$

$\iff x+2 = \sqrt{9}$ ou $x+2 = -\sqrt{9}$

$\iff x+2 = 3$ ou $x+2 = -3$

$\iff x = 3-2$ ou $x = -3-2$

$\iff x = 1$ ou $x = -5$

$\iff \mathcal{S} = \{-5; 1\}$.

ou

➜ $E \iff (x+2)^2 - (3)^2 = 0$

$\iff (x+2+3)(x+2-3) = 0$

$\iff (x+5)(x-1) = 0$

$\iff x+5 = 0$ ou $x-1 = 0$

$\iff x = -5$ ou $x = 1$

$\iff \mathcal{S} = \{-5; 1\}$.

V Équation quotient

Théorème 3

♦ *L'équation* $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ *est équivalente à* $\boxed{g(x) \neq 0 \text{ et } f(x) = 0.}$

♦ *L'équation* $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{h(x)}{k(x)}$ *est équivalente à* $\boxed{g(x) \neq 0 \text{ et } k(x) \neq 0}$ *et* $\boxed{f(x) \times k(x) = g(x) \times h(x).}$

Exemple 6
Résoudre l'équation $\dfrac{x-2}{-x-1} = 0$.

➜ $-x-1 \neq 0$ et $x-2 = 0$ soit $x \neq -1$ et $x = 2$

➜ $\mathcal{S} = \{2\}$.

Exemple 7
Résoudre l'équation $\dfrac{2x+1}{x} = \dfrac{2x}{x+4}$.

➜ $x \neq 0$ et $x+4 \neq 0$ et $(2x+1) \times (x+4) = x \times (2x)$,

➜ $x \neq 0$ et $x \neq -4$ et $2x^2 + 8x + x + 4 = 2x^2 \iff 9x + 4 = 0 \iff x = -\dfrac{4}{9}$.

➜ Conclusion : $\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{4}{9}\right\}$

Tableaux de signes et résolution d'inéquations.

VI Exemple(s) d'inéquation produit.

Exemple 8
Soit l'inéquation $(2x-4)(-x-5) \leq 0$. On constuit le tableau de signes de la façon suivante :

on place en abscisses les solutions des équations

dans la première colonne, on met les différents facteurs de l'inéquation

x	$-\infty$		-5		2		$+\infty$
$\boxed{2}x-4$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$\boxed{-}x-5$		$+$	0	$-$	|	$-$	
$(2x-4)(-x-5)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

pour déterminer les colonnes, on résout les équations
$2x-4=0 \iff x=2$
$-x-5=0 \iff x=-5$

Enfin, on résout l'inéquation à partir du tableau de signes : on cherche les solution négatives ou nulles

$$\mathcal{S} =]-\infty\,;-5\,] \cup [\,2\,;+\infty\,[.$$

Exemple 9
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(2x-1)^2 < (2x-1)(x-4)$:

- $$\begin{aligned}(2x-1)^2 < (2x-1)(x-4) &\iff (2x-1)^2-(2x-1)(x-4)<0\\ &\iff (2x-1)[(2x-1)-(x-4)]<0\\ &\iff (2x-1)(x+3)<0\end{aligned}$$
- construction du tableau de signes :

x	$-\infty$		-3		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$\boxed{2}x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$\boxed{1}x+3$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$(2x-1)(x+3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$2x-1=0 \iff x=\frac{1}{2}$

$x+3=0 \iff x=-3$

- Conclusion : on cherche les signes « $-$ » dans la dernière ligne d'où : $\mathcal{S} = \left]-3\,;\,\dfrac{1}{2}\right[$

VII Exemple(s) d'inéquation quotient.

On souhaite par exemple résoudre l'inéquation $\dfrac{-2x+4}{x+3} \geq 0$.

La seule différence avec l'inéquation produit, c'est qu'il faut faire attention à la valeur interdite : la valeur pour laquelle le dénominateur est nul.
Dans le tableau de signes, cela se traduit par une double barre au niveau des valeurs interdites

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$\boxed{-2}x+4$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$\boxed{1}x+3$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$\dfrac{-2x+4}{x+3}$		$-$	$\Vert$	$\boxed{+}$	0	$-$	

$\searrow$ $-2x+4=0 \Longleftrightarrow x=2$

$\nearrow$ $x+3=0 \Longleftrightarrow x=-3$

Enfin, on résout l'inéquation à partir du tableau de signes : on cherche les solutions positives ou nulles

$$\mathcal{S} =]\ 3\ ;\ 2\ ].$$

Exemple 10
Résoudre l'inéquation $\dfrac{2x+3}{x-1} \leq \dfrac{4x}{2x-3}$.

- On commence par transformer l'expression de manière à n'avoir QUE des produits ou des quotient d'un côté, et un zéro de l'autre :

$$\begin{aligned}
\frac{2x+3}{x-1} \leq \frac{4x}{2x-3} &\Longleftrightarrow \frac{2x+3}{x-1} - \frac{4x}{2x-3} \leq 0 \\
&\Longleftrightarrow \frac{(2x+3)(2x-3)-4x(x-1)}{(x-1)(2x-3)} \leq 0 \\
&\Longleftrightarrow \frac{4x^2-9-4x^2+4x}{(x-1)(2x-3)} \leq 0 \\
&\Longleftrightarrow \frac{4x-9}{(x-1)(2x-3)} \leq 0.
\end{aligned}$$

- construction du tableau de signes :

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		$\frac{9}{4}$		$+\infty$
$\boxed{4}x-9$		$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$\boxed{1}x-1$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$\boxed{2}x-3$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$\dfrac{4x-9}{(x-1)(2x-3)}$		$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	$\dfrac{3}{2}$	$+$	

$\nearrow$ $4x-9=0 \Longleftrightarrow x=\frac{9}{4}$

$\nearrow$ $x-1=0 \Longleftrightarrow x=1$

$\nearrow$ $2x-3=0 \Longleftrightarrow x=\frac{3}{2}$

- Conclusion : on cherche les solutions négatives ou nulles

$$\mathcal{S} =]-\infty\ ;\ 1\ [\cup \left[\ \frac{3}{2}\ ;\ \frac{9}{4}\ \right[.$$