Fonction racine carrée $x \to \sqrt{x}$.

1 Fonction Carrée.

Definition 1.1 *On appelle fonction racine carré la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ et qui à un réel $x \geq 0$ associe le nombre réel $\sqrt{x}$. On note alors $f(x) = \sqrt{x}$ ou bien $x \to \sqrt{x}$.*

1.1 Egalités remarquables.

Soient deux réels a et b positifs ($a \geq 0$, $b \geq 0$).

- ❒ $\sqrt{a}^{\;2} = a$.
- ❒ $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$.
- ❒ $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad b \neq 0$.
- ❒ $\sqrt{a}^{n} = \sqrt{a^n} \quad a \neq 0 \;\; n \in \mathbb{Z}$.

DEMONSTRATIONS :(rappel chapitre nombres réels)

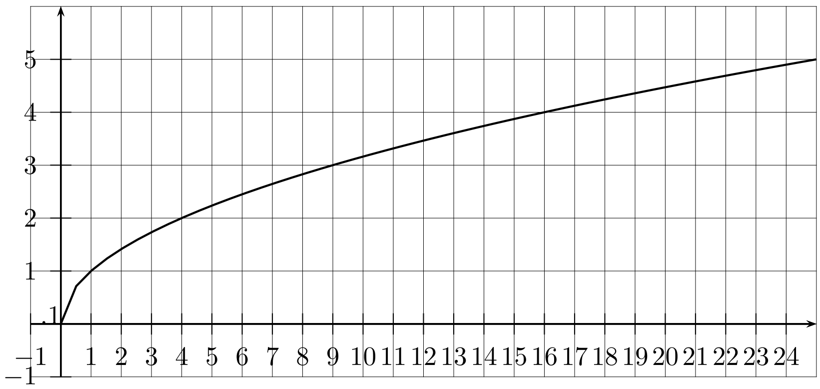
❒

❒

❒

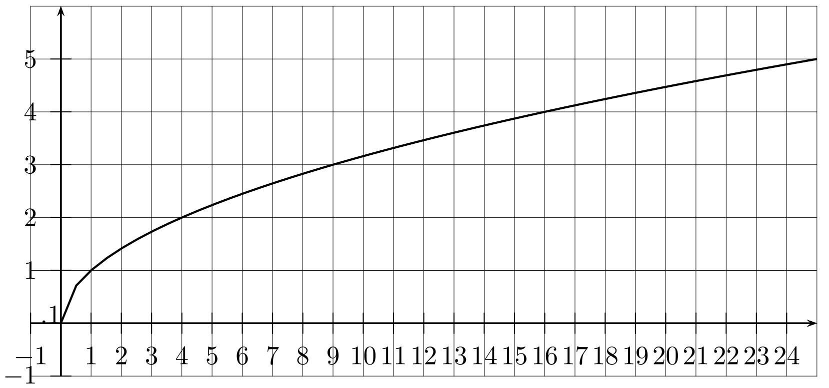
❒

1.2 Courbe représentative de $x \to \sqrt{x}$.



2 Variation de la fonction carrée $f : x \to \sqrt{x}$.

Idée de la démonstration



Proposition 2.1 ❒ *La fonction racine carrée est définie sur* $\mathbb{R}^+$.

❒ *La fonction racine carrée est strictement croissante sur* $[0; +\infty[$.

❒ *si* a *et* $b \in [0; +\infty[$ *avec* $a < b$ *alors* $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Remarque(s) 2.1 ***relation utile pour la démonstation de la variation :***
Pour tout $a \in [0; +\infty[$ *et* $a \in [0; +\infty[$ *on a :*

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b.$$

Démonstration :

DEMONSTRATION :
Démonstration de :si a et $b \in [0; +\infty[$ avec $a < b$ alors $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

3 La fonction $f : x \to \sqrt{x}$ avec PYTHON.

```python
def racine_carrée(x):
        y=sqrt(x)
        return y
```

4 Résolution de l'équation $\sqrt{x} = a$, avec $a \in \mathbb{R}$.

Théorème 4.1 $\boxed{\textit{L'équation } \sqrt{x} = a}$ *possède :*

- *une solutions si* $a \geq 0$ *:* $x = a^2$
- *aucune solution si* $a < 0$.

DEMONSTRATION :

1. Si $a < 0$, nous savons que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on $\sqrt{x} \geq 0$, un nombre strictement négatif ne peut pas être égal à un nombre positif. Donc il n'existe pas de solution, on écrit cela $\mathcal{S} = \emptyset$.
2. si $a \geq 0$:
   - Si $\sqrt{x} = a$ alors $\sqrt{a}^2 = a^2$, donc $x = a^2$
   - **Réciproquement :** si $x = a^2$ alors $\sqrt{x} = \sqrt{a^2} = |a| = a$, car $a \geq 0$.

Exemple(s) 4.1 *Dans chaque cas résoudre les équations suivantes :*

- $\sqrt{x} = 7$.
- $2\sqrt{x} + 1 = 0$.
- $3\sqrt{x} - 2 = 0$.
- $(\sqrt{x} - 5)(3\sqrt{x} - 2) = 0$.

SOLUTIONS :

5 Transformation d'expressions avec des racines carrées.

Exemple(s) 5.1 *Développer les expressions numériques suivantes :*

❒ $A = (2-\sqrt{5})^2 = 2^2 - 2\times 2\times\sqrt{5} + \sqrt{5}^2 = 4 - 4\sqrt{5} + 5 = 9 - 4\sqrt{5}$.

❒ $A = (\sqrt{2}+\sqrt{5})^2 = \sqrt{2}^2 - 2\times\sqrt{2}\times\sqrt{5} + \sqrt{5}^2 = 2 - 2\sqrt{10} + 5 = 7 - 2\sqrt{10}$.

Exercice 5.1 ➠ *Développer* $(1-\sqrt{3})^2 =$.

➠ *Quel est le signe de* $1-\sqrt{3}$ *?*

➠ *En déduire une expression de* $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$ *avec un seul radical.*

Exercice 5.2 *On considère deux réels positifs quelconques a et b. Développer les expressions suivantes.*

➠ $(2\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 =$.

➠ $(\sqrt{2a}-\sqrt{2b})^2 =$.

➠ $(2\sqrt{a}+3\sqrt{b})(2\sqrt{a}-3\sqrt{b}) =$.

Théorème 5.1 *Soit a, b, c, d des nombres quelconques appartenant à $\mathbb{Q}$ avec $d>0$ et $b+c\sqrt{d}\neq 0$. soit $A = \dfrac{a}{b+c\sqrt{d}}$, pour écrire A avec un dénominateur rationnel, on multiplie numérateur et dénominateur par $b-c\sqrt{d}$, en ayant préalablement démontré que $b-c\sqrt{d}$ est un réel non nul.*

Démonstration :