Limite d'une suite.

1 Limite d'une suite réelle.

1.1 limite finie d'une suite.

Definition 1.1 *Dire que le réel l est limite d'une suite (u_n) ou que (u_n) converge vers l, signifie que tout intervalle ouvert de centre l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On note le fait que la suite ait pour limite l, par :* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

Exemple(s) 1.1 *a)* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ *b)* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ *c)* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$
d) $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 + \frac{1}{n^3} = 2$ *e)* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = 1$

1.2 Limite infinie d'une suite.

Definition 1.2
— *Dire qu'une suite (u_n) a pour limite $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert de la forme $]A;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Notation : On note le fait que la suite (u_n) ait pour limite $+\infty$ par :*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

— *Dire qu'une suite (u_n) a pour limite $-\infty$ signifie que tout intervalle ouvert de la forme $]-\infty;A[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Notation : On note le fait que la suite (u_n) ait pour limite $-\infty$ par :*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty.$$

Exemple(s) 1.2 *a)* $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ *b)* $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$
c) $\lim\limits_{n\to+\infty} -\sqrt{n} = -\infty$ *d)* $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$
e) $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^5 = -\infty$

Remarque(s) 1.1 *si une suite (v_n) a pour limite $+\infty$ ou $-\infty$, on dit que cette suite diverge, ou qu'elle est divergeante.*

1.3 Limite de la suite géométrique $u_n = q^n$.

Théorème 1.1 *Soit $q \in \mathbb{R}$,*

- *si $|q| < 1$ ie $(-1 < q < 1)$ alors $\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$.*
- *si $q > 1$ alors $\lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.*
- *Si $q \leq -1$ la suite (u_n) n'a pas de limite.*

Exemple(s) 1.3 *a)* $\lim_{n \to +\infty} (\frac{1}{2})^n = 0$ *b)* $\lim_{n \to +\infty} (\frac{-1}{3})^n = 0$
c) $\lim_{n \to +\infty} (3)^n = +\infty$ *d)* $\lim_{n \to +\infty} (1,2)^n = +\infty$
e) La suite $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

2 Opérations sur les limites.

2.1 Limite d'une somme de suites.

Proposition 2.1

$\lim_{n \to +\infty} u_n$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \to +\infty} v_n$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n \to +\infty} (u_n + v_n)$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	*forme indéterminée*

2.2 Limite d'un produit de suites.

Proposition 2.2

$\lim_{n \to +\infty} u_n$	l	$l < 0$ *ou* $-\infty$	$l > 0$ *ou* $+\infty$	$l < 0$ *ou* $-\infty$	$l > 0$ *ou* $+\infty$	*0*
$\lim_{n \to +\infty} v_n$	l'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ *ou* $-\infty$
$\lim_{n \to +\infty} (u_n \times v_n)$	$l \times l'$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	*forme indéterminée*

2.3 Limite d'un quotient de suites.

2.3.1 Cas ou $\lim_{n \to +\infty} v_n \neq 0$.

$\lim_{n \to +\infty} u_n$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{n \to +\infty} v_n$	$l' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{u_n}{v_n}\right)$	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	forme indéterminée

2.3.2 Cas ou $\lim_{n \to +\infty} v_n = 0$.

$\lim_{n \to +\infty} u_n$	$l > 0$ ou $+\infty$	$l > 0$ ou $+\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	0
$\lim_{n \to +\infty} v_n$	0 en restant positive	0 en restant négative	0 en restant positive	0 en restant négative	0
$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{u_n}{v_n}\right)$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	forme indéterminée