Limites d'une fonction.

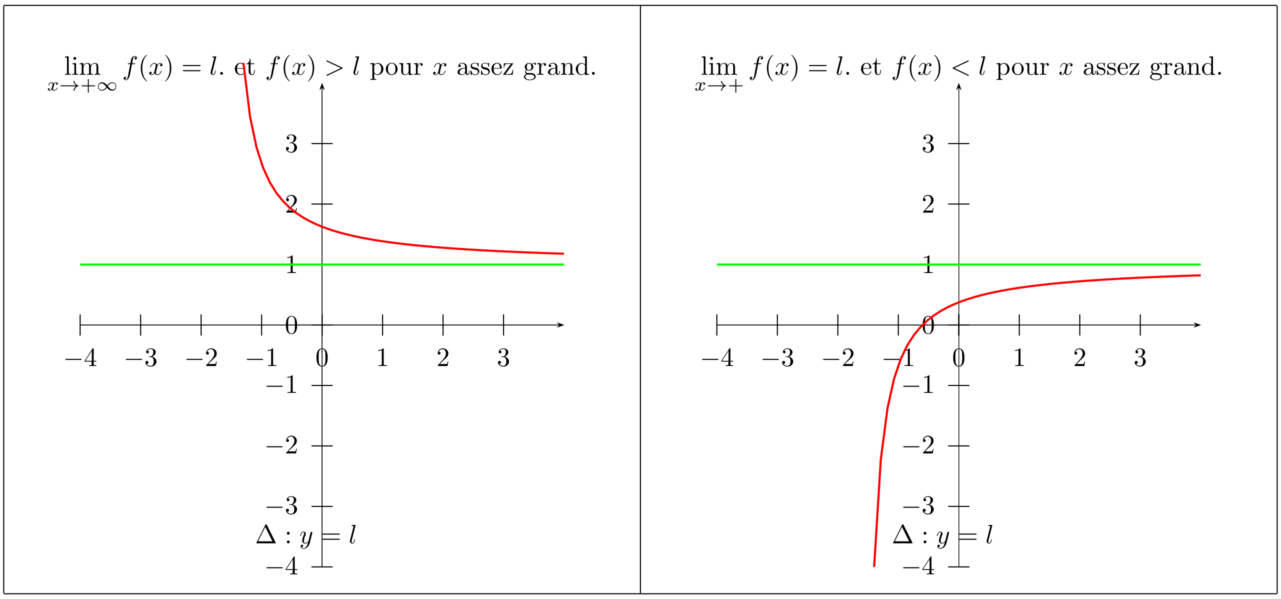
1 Limite d'une fonction en $+\infty$ et $-\infty$.

1.1 limite finie au voisinage de l'infini.

Definition 1.1

1. *Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[A;+\infty[$ où A est un réel, soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f et soit l un réel.*
   Dire que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers $+\infty$ signifie que $f(x)$ est aussi proche de la valeur l que l'on veut dès que x est suffisamment grand.
   On note cela par :
   $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l.$$
2. *Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]-\infty;A]$ où A est un réel, soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f et soit l un réel.*
   Dire que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers $-\infty$ signifie que $f(x)$ prend des valeurs aussi proche de l que l'on veut dès que x prend des valeurs négatives de valeur absolue suffisamment grande.
   On note cela par :
   $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l.$$
3. *Dans les deux cas précédents, on dit que la droite $\Delta : y = l$ est une asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et $-\infty$.*

1.2 Interprétation graphique.

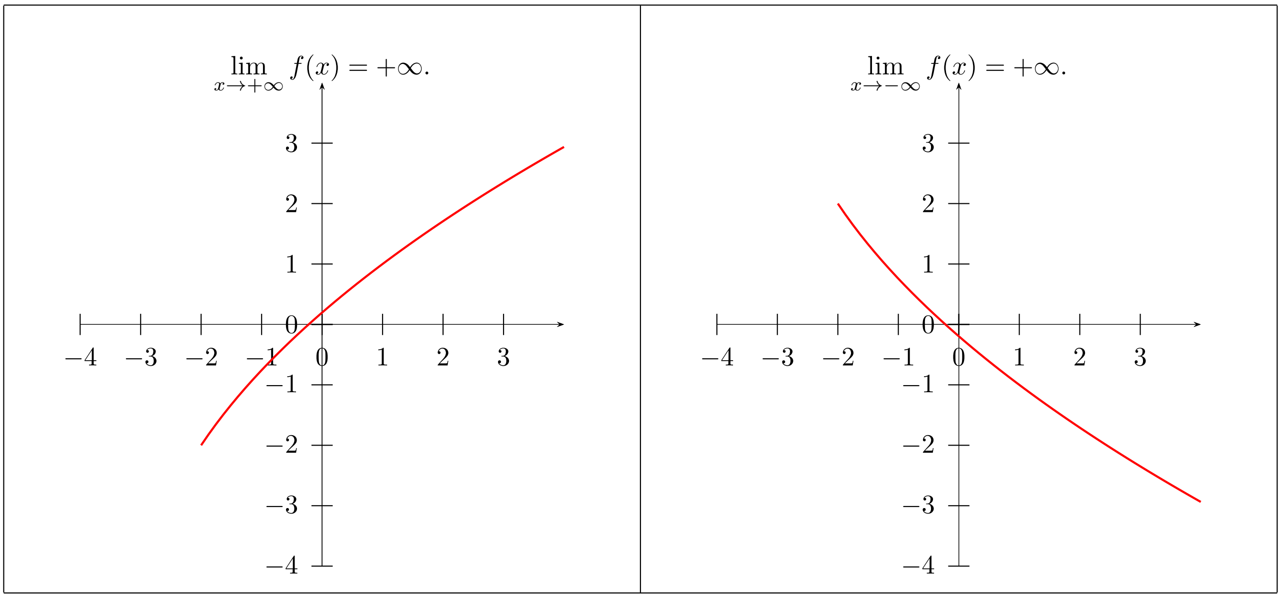


1.3 Limite infinie au voisinage de l'infini.

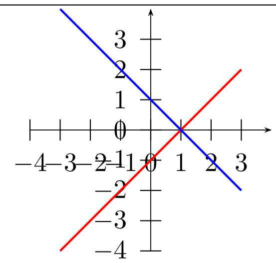
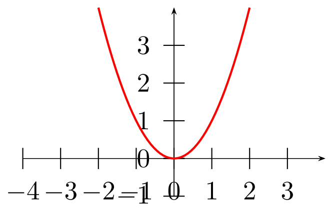
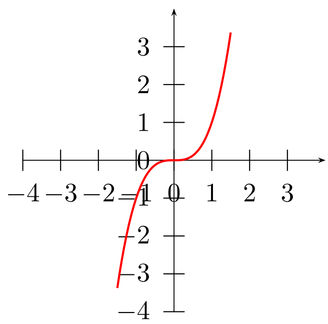
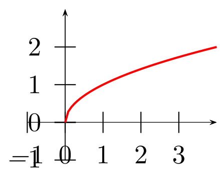
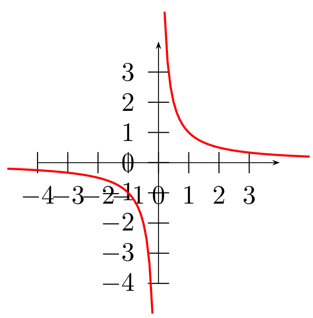
Definition 1.2

1. *Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[A;+\infty[$ où A est un réel, soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f et soit l un réel.*
   Dire que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ signifie que $f(x)$ est aussi grand que l'on veut dès que x est suffisamment grand.
   On note cela par :
   $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$
2. *Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]-\infty;A]$ où A est un réel, soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f et soit l un réel.*
   Dire que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$ signifie que $f(x)$ prend des valeurs aussi grande que l'on veut dès que x prend des valeurs négatives de valeur absolue suffisamment grande.
   On note cela par :
   $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty.$$

1.4 Interprétation graphique.



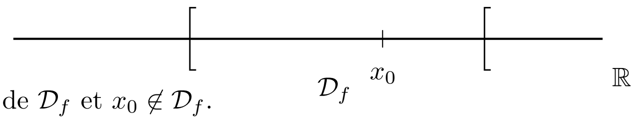
2 Limites de références en $+\infty$ et $-\infty$.

Fonction de référence	Limite de référence	Courbe de référence
$x \to ax+b$	Si $a>0$: $\lim\limits_{x\to-\infty}(ax+b)=-\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty}(ax+b)=+\infty$ si $a<0$ $\lim\limits_{x\to-\infty}(ax+b)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty}(ax+b)=-\infty$	
$x \to x^2$	$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$	
$x \to x^3$	$\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$	
$x \to \sqrt{x}$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}=+\infty$	
$x \to \dfrac{1}{x}$	$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x}=0$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}=0$ $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{1}{x}=-\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x}=+\infty$	

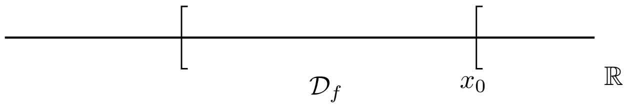
3 Limite d'une fonction en un réel x_0.

Dans le reste de notre cours, on notera $\mathcal{D}_f$ le domaine de définition de la fonction f et on supposera que x_0 est un réel avec

— ou bien $x_0 \in \mathcal{D}_f$



— ou bien x_0 est une borne de $\mathcal{D}_f$ et $x_0 \notin \mathcal{D}_f$.



3.1 Limite finie en x_0.

Definition 3.1 *Dire qu'une fonction f a pour limite le nombre réel l en x_0 signifie que $f(x)$ est aussi proche de l que l'on veut dès que x est "assez proches" de x_0 en restant dans le domaine de définition de f.*

Remarque(s) 3.1 *Lorsqu'une fonction f a pour limite l en x_0, on note cela par $\lim\limits_{x \to x_0, x_0 \in \mathcal{D}_f} f(x) = l$. Trois cas se présentent.*

1. *Lorsque $x_0 \in \mathcal{D}_f$, on note $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.*
2. *Lorsque x_0 est une borne réelle de $\mathcal{D}_f$.*
   — *Si $\mathcal{D}_f =]x_0; +\infty[$ ou $\mathcal{D}_f =]x_0; b[$ ou bien $\mathcal{D}_f =]x_0; b]$ avec $x_0 < b$, on écrit alors*
   $$\lim_{x \to x_0, x_0 \in \mathcal{D}_f} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l.$$
   On dit que f a une limite finie à droite en x_0.
   — *Si $\mathcal{D}_f =]-\infty; x_0[$ ou $\mathcal{D}_f =]c; x_0[$ ou bien $\mathcal{D}_f = [c; x_0[$ avec $c < x_0$, on écrit alors*
   $$\lim_{x \to x_0, x_0 \in \mathcal{D}_f} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l.$$
   On dit que f a une limite finie à droite en x_0.

3.2 Exemples de limites finies en un point x_0.

Exemple(s) 3.1

4 Limite infinie en x_0.

4.1 Asymptote verticale.

Soit x_0 un réel et f une fonction définie au voisinage de x_0 à droite et/ou à gauche, mais non définie en x_0. C'est à dire que nous sommes dans les cas suivants $]-\infty; x_0[\cap \mathcal{D}_f \neq \emptyset$, ou $]x_0; +\infty[\cap \mathcal{D}_f \neq \emptyset$, ou $]x_0 - \epsilon; x_0 + \epsilon[\cap \mathcal{D}_f \neq \emptyset$.

Definition 4.1 1. *Dire que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers x_0 avec $x > x_0$ signifie que $f(x)$ est aussi grand que l'on veut dès que x est suffisamment proche de x_0 avec $x > x_0$.*
On note cela par :

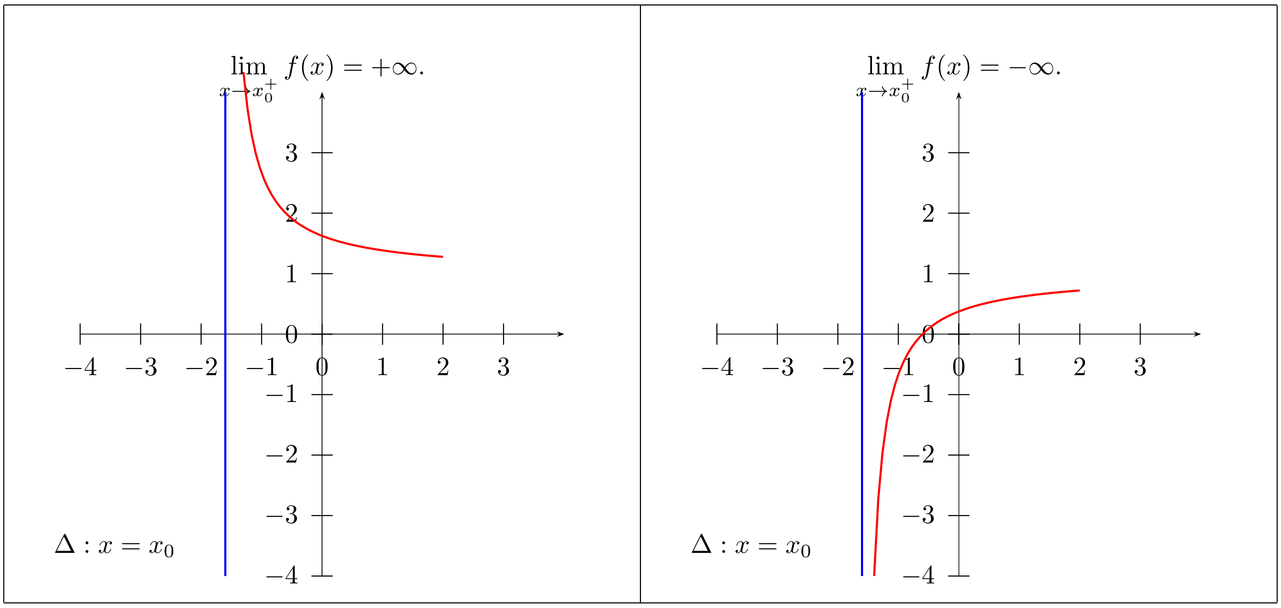
$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty.$$

2. *Dire que $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers x_0 avec $x > x_0$ signifie que $f(x)$ prend des valeurs négative de valeur absolue aussi grande que l'on veut dès que x est suffisamment proche de x_0 avec $x > x_0$.*
On note cela par :

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty.$$

3. *Dans les deux cas précédents, on dit que la droite $\Delta : x = x_0$ est une asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}_f$ à droite de x_0.*

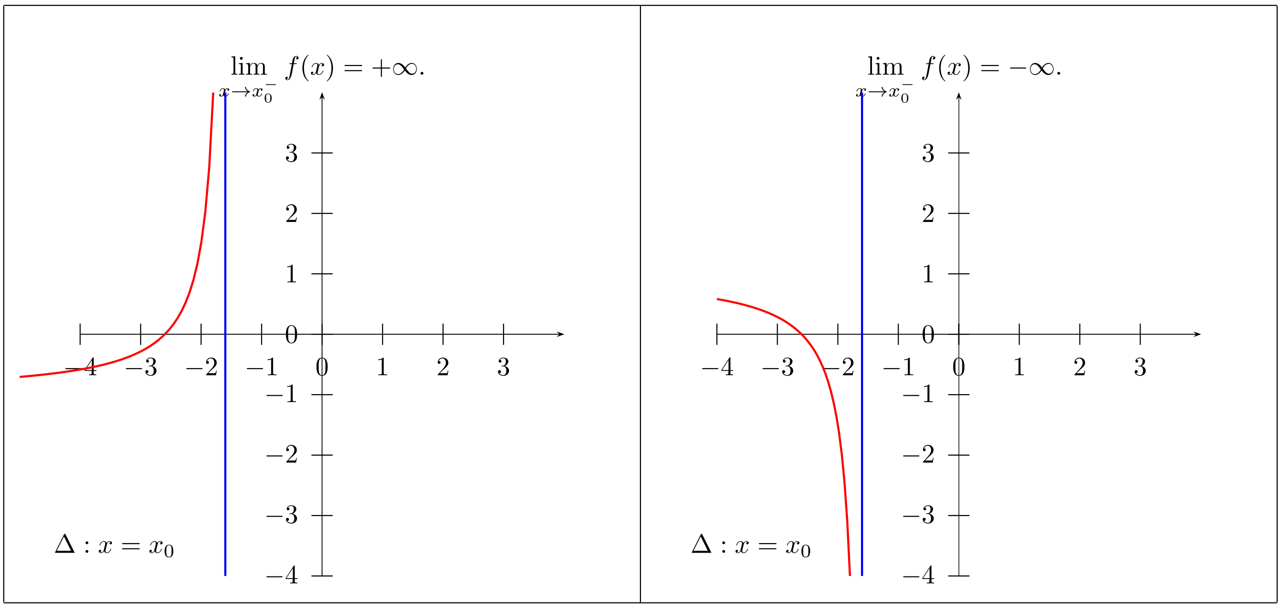
4.2 Interprétation graphique.



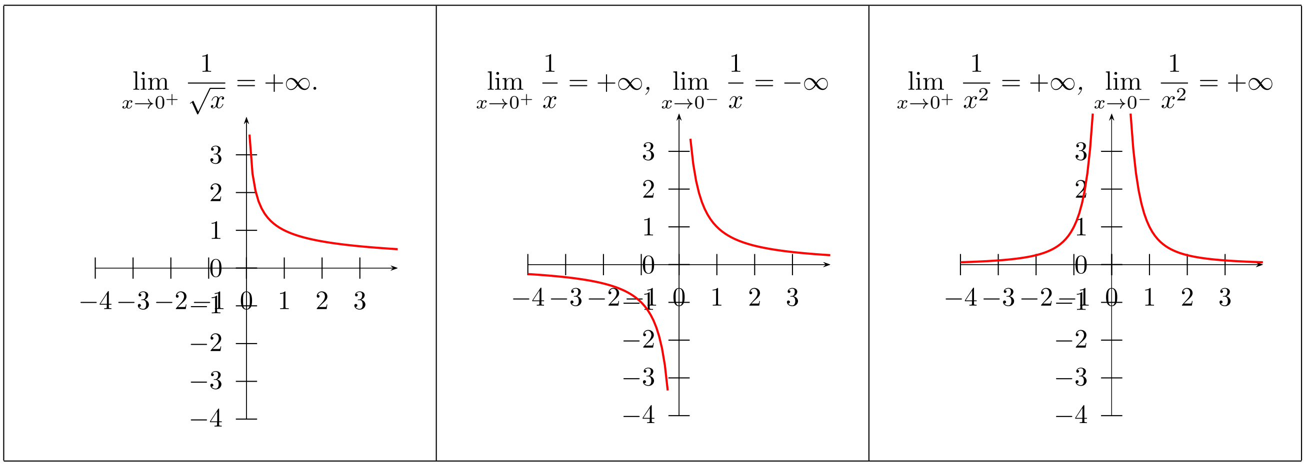
Definition 4.2

1. *Dire que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers x_0 avec $x < x_0$ signifie que $f(x)$ est aussi grand que l'on veut dès que x est suffisamment proche de x_0 avec $x < x_0$.*
   On note cela par :
$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty.$$
2. *Dire que $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers x_0 avec $x < x_0$ signifie que $f(x)$ prend des valeurs négatives de valeur absolue aussi grande que l'on veut dès que x est suffisamment proche de x_0 avec $x < x_0$.*
   On note cela par :
$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty.$$
3. *Dans les deux cas précédents, on dit que la droite $\Delta : x = x_0$ est une asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}_f$ à gauche de x_0.*

4.3 Interprétation graphique.



Exemple(s) 4.1



5 Opérations sur les limites de fonctions en a, $a \in \overline{\mathcal{D}_f}$.

Dans cette section la lettre a désigne soit un nombre réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$.

5.1 Limite d'une somme de fonctions en a.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} (f(x)+g(x))$	l+l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	forme indéterminée

5.2 Limite d'un produit de fonctions en a.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	$l<0$ ou $-\infty$	$l>0$ ou $+\infty$	$l<0$ ou $-\infty$	$l>0$ ou $+\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	l'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} f(x)\times g(x)$	$l\times l'$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	forme indéterminée

5.3 Limite d'un quotient de fonctions $\frac{f}{g}$ en a.

5.3.1 Cas ou $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l'\neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$l'>0$	$l'<0$	$l'>0$	$l'<0$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	forme indéterminée

5.3.2 Cas ou $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l>0$ ou $+\infty$	$l>0$ ou $+\infty$	$l<0$ ou $-\infty$	$l<0$ ou $-\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	0 en restant positive	0 en restant négative	0 en restant positive	0 en restant négative	0
$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	forme indéterminée

6 Exemples de calculs sur les limites.

6.1 Lever une forme indéterminée du type $\infty - \infty$.

Exemple(s) 6.1

6.2 Lever une forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$.

Exemple(s) 6.2

6.3 Lever une forme indéterminée du type $0 \times \infty$.

Exemple(s) 6.3

6.4 Lever une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$.

Exemple(s) 6.4

7 comportement asymptotique à l'infinie des fonctions rationnelles.

Théorème 7.1 *La limite de la fonction rationnelle en $+\infty$ ou en $-\infty$ définie par*

$$f(x) = \frac{a_n x^n + ... + a_1 x + a_0}{b_p x^p + ... + b_1 x + b_0} \quad avec \quad a_n \neq 0 \ \ et \ \ b_p \neq 0$$

est celle de $x \to \dfrac{a_n x^p}{b_p x^p}$.

DEMONSTRATION :

Exemple(s) 7.1

8 Algorithmique et limites d'une fonction.

8.1 Exemple de vérification d'une convergence.

On verra dans le cours de l'année que nous avons la propriété suivante :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Vérifions à l'aide d'un algorithme cette propriété de la fonction $f : x \to \dfrac{sin(x)}{x}$.

```
from math import
epsilon=float(input('entrer la précision:'))
n=1
x=1/n
while(abs((sin(x)/x)-1>=epsilon)):
        n=n+1
        x=1/n
print(x)
```

Exemple(s) 8.1 1. *Que représente le réel epsilon ?*

2. *Que cherche t-on à confirmer avec cet algorithme ?*

3. *Faites tourner l'algorithme à la main, supposons qu'à la ligne 7 on a donné à epsilon la valeur 0.01.*

Remarque(s) 8.1 *Le fait de poser à la ligne 9 et 13 que* $x = \dfrac{1}{n}$ *signifie que l'on regarde en fait la limite de la suite suivante :*

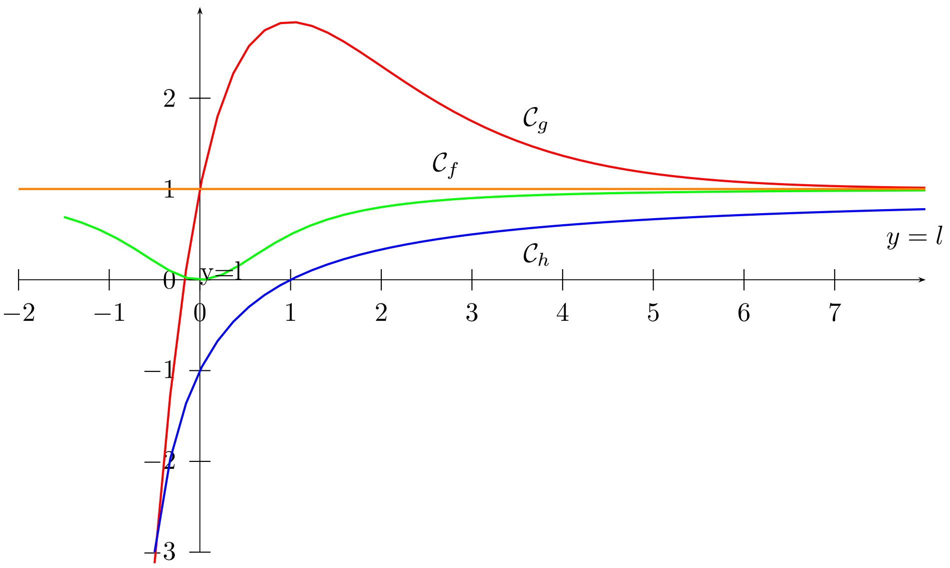
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sin(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}.$$

9 théorème d'encadrement-(théorème des gendarmes).

9.1 Limite finie en $+\infty$.

Théorème 9.1 ***Admis***
Soient f, g, h *trois fonctions définies sur un intervalle* $I = [b, +\infty[$ *et soit* $l \in \mathbb{R}$.
Si pour tout $x \in I$, *on a* $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ *et si* $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = l$, *alors* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$.

9.2 Interpretation graphique.



Exemple(s) 9.1 *Etudions la limite en $+\infty$ de* $\dfrac{\sin(x)}{x}$

Pout tout $x \in \mathbb{R}$ nous avons $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$ nous avons $\frac{-1}{x} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{x}$. on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ donc d'aprés le théorème d'encadrement sur les limites on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin(x)}{x} = 0$.

Exercice 9.1 *Montrer que la fonction $j(x) = \frac{2x+\cos(x)}{3x-1}$ définie $]\frac{1}{3}; +\infty[$ admet une limite en $+\infty$. Nous savons que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $-1 \leq \cos(x) \leq 1$.*

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad 2x - 1 \leq 2x + \cos(x) \leq 2x + 1$$

or $\forall x \in]\frac{1}{3}; +\infty[$ on a que $3x - 1 > 0$ donc

$$\forall x \in]\frac{1}{3}; +\infty[\qquad \frac{2x-1}{3x-1} \leq \frac{2x+\cos(x)}{3x-1} \leq \frac{2x+1}{3x-1}$$

On sait calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x-1}{3x-1}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+1}{3x-1}$ (Indétermination du type $\frac{\infty}{\infty}$). on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x-1}{3x-1} = \dfrac{2}{3}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+1}{3x-1} = \dfrac{2}{3}$ donc nous avons $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+\cos(x)}{3x-1} = \dfrac{2}{3}$.

Théorème 9.2 ***Admis***
Soint f, g deux fonctions définies sur $I =]b; +\infty[$ et $l \in \mathbb{R}$.
Si pour tout $x \in I$ $|f(x) - l| \leq g(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$.

10 comparaison à l'infini.

Théorème 10.1 *Soient f, g deux fonctions définies sur $I =]b; +\infty[$ ou $I = [b; +\infty[$.*

— *Si pour tout $x \in I$ $g(x) \geq f(x)$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.*
— *Si pour tout $x \in I$ $f(x) \leq g(x)$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.*

Exemple(s) 10.1 *Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} x + \cos(x) = +\infty$. $\forall x \in \mathbb{R}$ nous avons $-1 \leq \cos(x)$, donc $x - 1 \leq x + \cos(x)$, or $\lim\limits_{x \to +\infty} x - 1 = +\infty$ donc d'aprés le théorème de comparaison à l'infini, on obtient $\lim\limits_{x \to +\infty} x + \cos(x) = +\infty$.*

DEMONSTRATION :

Savoir-faire 10.1 *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :*

$$-1 \leq f(x) \leq 1.$$

② *Déterminer* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

② *Déterminer* $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + f(x))$.

② *Déterminer* $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x^2)$.