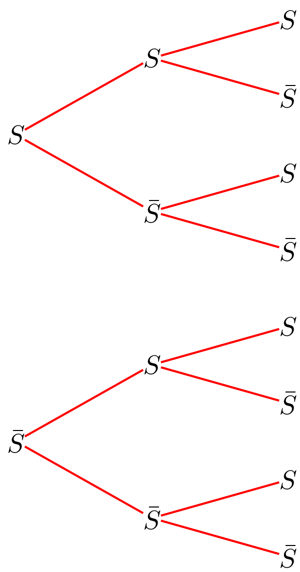
Schéma de Bernoulli, loi binomiale.

1 Loi binomiale.

1.1 Exemple d'expérience de Bernoulli.

On lance un dé trois fois de suite et on note S l'événement "le six est sortie", et par $\bar{S}$ l'événement "le six n'est pas sortie", on pose $p(S) = p = \dfrac{1}{6}$ et $p(\bar{S}) = q$, on a donc $p = 1 - q = \dfrac{5}{6}$



issues	probabilité
sss	p^3
$ss\bar{s}$	p^2q
$s\bar{s}s$	p^2q
$s\bar{s}\bar{s}$	pq^2
$\bar{s}ss$	p^2q
$\bar{s}s\bar{s}$	pq^2
$\bar{s}\bar{s}s$	pq^2
$\bar{s}\bar{s}\bar{s}$	q^3

Notons X la variable aléatoire qui a chaque issue, associe le nombre de succès aprés les trois lancers. On a donc la loi de probabilité suivante pour X.

Nombre de succès k	0	1	2	3
$P(X = k)$	q^3	$3pq^2$	$3p^2q$	p^3

1.2 Cas général, épreuve de Bernoulli, loi binomiale de paramètres n et p.

Définition 1.1 *On appelle schéma de Bernouilli de paramètre $n(n \in \mathbb{N})$ et $p(p \in [0;1])$ une expérience aléatoire correspondant à la répition de n expériences identiques ayant que deux issues possibles, où le nombre p est la probabilité d'une des deux issues. L'une des deux issue est appelée* ***succès****.*

Notons X la variable aléatoire qui donne le nombre de succès S au terme des n épreuves identiques, X prend donc comme valeurs $\{0, 1, 2, ..., n\}$. Soit $\mathcal{E}$ un schéma de Bernouilli de paramètres n et p, et soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de succès, alors on dit que la loi de probabilité de X suit la loi binomiale de paramètre n et p. on note cela $\mathcal{B}(n, p)$.

2 Calcul de la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

2.1 Coefficients binomiaux.

Définition 2.1 *Soit n un entier non nul et $0 \leq k \leq n$. le coefficient binomial $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ est le nombre de chemins réalisant k succès pour n répétitions dans l'arbre d'un schéma de bernouilli.*

2.2 Calculs des coefficients binomiaux.

2.2.1 Utilisation du triangle de Pascal.

$n \vert p$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

2.2.2 Utilisation de la calculatrice.

Calculons : $\begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 15 \\ 10 \end{pmatrix}$.

3 Calcul pratique de $p(X = k)$; $p(X \leq k)$ et $p(X > k)$.

Propriété 3.1 *Soit X une variable aléatoire, qui suit une loi binomiale de paramètres n et p.*
Alors on a :

1. *X prend les valeurs $\{0, 1, ..., n\}$.*
2. *Pour tout $0 \leq k \leq n$, on a : $P(X = k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k q^{n-k}$.*
3. *$p(X \leq k) = p(X = 0) + ... + p(X = k)$.*
4. *$p(X > k) = 1 - p(X \leq k)$.*

3.0.1 Utilisation de la calculatrice.

Soit X qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(10; 0.2)$. Calculer $p(X = 2)$, $p(X \leq 2)$ et $p(X > 2)$.

Propriété 3.2 *Soit X une variable aléatoire, qui suit une loi binomiale de paramètres n et p. Alors on a :*

$$E(X) = np.$$

$$V(X) = npq.$$

4 Représentation graphique de la loi binomiale.

Pour représenter graphiquement la loi de probabilité de $X \longleftarrow \mathcal{B}(n, p)$. on doit :

1. déterminer la loi de probabilité de X ;
2. Faire un diagramme en bâtons, ou on met les entiers k avec $0 \leq k \leq n$ en abscisse et les valeur de $p(X = k)$ en ordonnée.

Exemple(s) 4.1 *Prenons par exemple $n = 20$ et $p = 0,3$, on obtient le digramme en bâtons suivant qui représente la loi de probabilité de $\mathcal{B}(20; 0.3)$.*