Loi des grands nombres.

1 Des inégalités importantes.

1.1 Inégalite de Markov.

Définition 1.1 *Une variable aléatoire est dite positive ou nulle dans une univers Ω, lorsque toutes les valeurs prises par celle-ci sont des réél positifs ou nuls.*

Théorème 1.1 *Soit X une variable aléatoire réelle positive ou nulle d'espérance $E(X)$.*
Alors, pour tout réel a strictement positif, on a :

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}.$$

Cette égalité est appelé l'inégalité de Markov.

Démonstration :

Exemple(s) 1.1

1.2 Inégalité de Tchebychev.

Théorème 1.2 *Soit X une variable aléatoire réelle positive ou nulle d'espérance $E(X)$ et de variance $V(X)$.*
Alors, pour tout réel a strictement positif, on a :

$$P\Big((X - E(X)) \geq a\Big) \leq \frac{V(X)}{a^2}.$$

Cette égalité est appelé l'inégalité de Markov.

Démonstration :

Exemple(s) 1.2

Propriété 1.1 *Sous les mêmes conditions que la propriété précédente, nous avons l'inégalité suivante :*

$$P\Big((X - E(X)) < a\Big) \geq 1 - \frac{V(X)}{a^2}.$$

Démonstration :

Exemple(s) 1.3

2 Loi des grands nombres.

Théorème 2.1 *Soit X une variable aléatoire d'espérance $E(X)$ et de variance $V(X)$.*
On pose $M_n = \frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^{n} X_i$, la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n de X, où les variables X_i sont indépendantes et de même loi de probabilité que X.
Alors pour tout réel a strictement positif, nous avons l'inégalité : $P\Big(|M_n - E(X)| \geq a\Big) \leq \frac{V(X)}{na^2}$. Cette inégalité est appelée L'inégalité de concentration.

Démonstration :

Exemple(s) 2.1

Propriété 2.1 *Soit* (X_n) *un échantillon d'une variable aléatoire.*
On pose $M_n = \dfrac{1}{n}\Sigma_{i=1}^{n} X_i$.
Alors, pour tout réel a *strictement positif,* $\lim\limits_{n\to+\infty} P\Big(|M_n - E(X)| \geq a\Big) = 0$.

Démonstration :

Exemple(s) 2.2