Primitives et intégrales de fonctions.

1 Définition, relations entre les primitives d'une fonction.

Definition 1.1 *Soit f une fonction définie sur une partie I de $\mathbb{R}$. Une primitive de f sur I est une fonction F dérivable sur I, telle que pour tout $x \in I$, on a :*

$$F'(x) = f(x).$$

Exemple(s) 1.1 *Si on considère f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x$, alors la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x^2$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$, de même la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = x^2 + 7$ est encore une primitive de f.*

Remarque(s) 1.1 ***Au vu de l'exemple précédent, quand une fonction admet une primitive, elle en admet en fait une infinité. On a donc le théorème suivant.***

Théorème 1.1 *Soit f une fonction définie sur un **intervalle** I.*
*Si f admet une primitive F sur I, alors f admet une infinité de primitives **et toute autre primitive** de f sur I est définie par $G(x) = F(x) + k$ où $k \in \mathbb{R}$.*

DEMONSTRATION :

Remarque(s) 1.2 ***Attention la condition que I soit un intervalle est trés importante.***

Corollaire 1.1 *Soit f une fonction définie sur un **intervalle** I admettant une primitive sur I, et soit x_0 un nombre réel appartenant à I et y_0 un nombre réel quelconque.*
Il existe une seule primitive G de f sur I telle que $G(x_0) = y_0$.

DEMONSTRATION :

2 primitives des fonctions usuelles.

Fonction f	Primitive F	Intervalle I
$f(x) = a$	$F(x) = ax$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ si $n \in \mathbb{N}$	$F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ si $n < -1$	$F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x)$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = 1 + \tan x^2$	$F(x) = \tan(x)$	$]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[$ $k \in \mathbb{Z}$

3 Opérations sur les primitives.

Théorème 3.1 *1. Si F et G sont des primitives des fonctions f et g sur un intervalle I, alors $F+G$ est une primitive de $f+g$ sur I.*

2. Si F est une primitive de la fonction f sur un intervalle I et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda \times F$ est une primitive de $\lambda \times f$ sur I.

4 Exemples de calculs de primitives.

5 Exemples de primitives de Fonctions composées.

Fonction f	Primitive F	Intervalle de validité dans I
$f(x) = u' \times (u)^n$ $n \in \mathbb{N}$	$F(x) = \dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	I
$f(x) = u' \times (u)^n$ si $n < -1$	$F(x) = \dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	pour tout $x \in I$, $u(x) \neq 0$
$f(x) = \dfrac{u'}{u}$	$F(x) = \ln(u)$ ou $f(x) = \ln(-u)$	$u > 0$ sur I ou $u < 0$ sur I
$f(x) = \dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$F(x) = 2\sqrt{u}$	$u(x) > 0$ sur I
$f(x) = u'e^u$	$F(x) = e^u$	I
$f(x) = u' \sin u$	$F(x) = -\cos u$	I
$f(x) = u' \cos u$	$F(x) = \sin u$	I
$f(x) = u(ax+b)$ $a \neq 0$	$F(x) = \dfrac{1}{a}U(ax+b)$	I

Exemple(s) 5.1

6 Primitives de $u' \times (g' \circ u)$.

Théorème 6.1 *Soit u et g deux fonctions dérivables respectivement sur I et J* ***deux intervalles****, avec $u(I) \subset J$.*
La fonction $g \circ u$ est une primitive sur I de la fonction f définie sur I par $f(x) = u'(x) \times (g'[u(x)])$.

Exemple(s) 6.1

Intégrale d'une fonction sur un intervalle.

7 Intégrale d'une fonction en escalier.

Definition 7.1 *Une fonction f définie sur un intervalle $I = [a; b]$ $(a < b)$ est en escalier lorsqu'il existe $n + 1$ nombres réels $x_i \in [a; b]$ tels que $x_0 = a$, $x_n = b$ et*

$$x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n$$

et tels que f est constante sur chaque intervalle ouvert $]x_i; x_{i+1}[$, pour $0 \leq i \leq n - 1$.

Exemple(s) 7.1

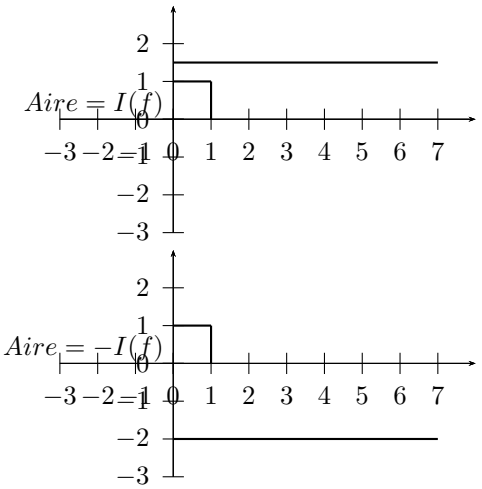
Definition 7.2 *1. Soit f une fonction définie sur $[a; b]$ telle que pour tout $x \in]a; b[$; $f(x) = c$.*
Par définition l'intégrale de f sur l'intervalle $[a; b]$ est le nombre réel :

$$I(f) = (b - a)c.$$

2. Soit f une fonction en escalier, et soit $x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n$ $n + 1$ réels tels que pour $0 \leq i \leq n - 1$ $f(x) = c_i$ pour tout $x \in]x_i; x_{i+1}[$.
Par définition l'intégrale de f sur l'intervalle $[a; b]$ est le nombre réel :

$$I(f) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)c_i = (x_1 - x_0)c_0 + (x_2 - x_1)c_1 + ... + (x_n - x_{n-1})c_{n-1}.$$

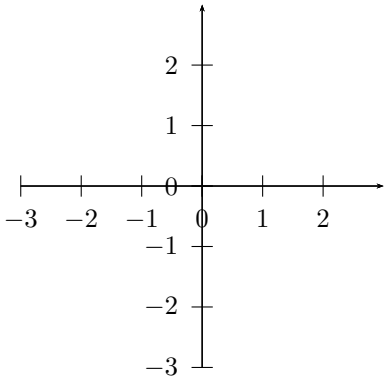
interprétation géométrique.



$f(x) = 1.5$ pour $x \in [0; 7]$ l'aire du rectangle coloré est égal à $7 \times 1.5 = I(f)$ $u.a$

$f(x) = -2$ pour $x \in [0; 7]$ l'aire du rectangle coloré est égal à $7 \times 0.5 = -I(f)$ $u.a$

Exemple(s) 7.2



8 Intégrale d'une fonction continue.

Soit f une fonction continue, il existe deux suites de fonctions en escalier (g_n) et (h_n) telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [a;b]$, on a $g_n(x) \leq f(x) \leq h_n(x)$. De plus on a :

$$\lim_{n\to+\infty} I(g_n) = \lim_{n\to+\infty} I(h_n) = l.$$

De plus si il existe deux autres suites de fonctions (g'_n) et (h'_n) en escalier encadrant f, on démontre aussi que :

$$\lim_{n\to+\infty} I(g'_n) = \lim_{n\to+\infty} I(h'_n) = l.$$

Definition 8.1 *La limite l est **l'intégrale de** f sur $[a;b]$ $(a < b)$. On note :*

$$l = \int_a^b f(t)dt.$$

8.1 Aire et intégrale.

9 Propriétés de l'intégrale.

9.1 Relation de Chasles.

Théorème 9.1 *Soit f une fonction continue sur I.*
Pour tout a, b et c dans I, on a :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

9.2 Linéarité de l'intégrale.

Théorème 9.2 *Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, soit λ un nombre réel. Pour tout a et b dans I, on a :*

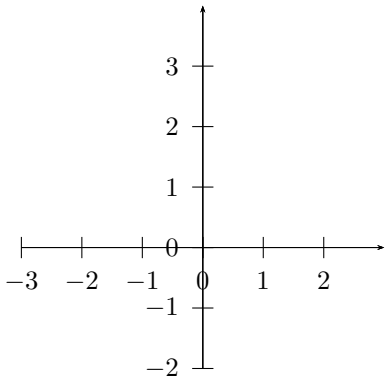
$$\int_a^b \lambda f(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt \quad \text{et} \quad \int_a^b (f(t)+g(t))dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt.$$

10 Encadrement d'une intégrale

Théorème 10.1 *Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, et soit a et b deux réel dans I.*

- *Si $a \leq b$ et pour tout $t \in [a;b]$ $f(t) \geq 0$, alors $\int_a^b f(t)dt \geq 0$.*
- *Si $a \leq b$ et pour tout $t \in [a;b]$ $f(t) \leq g(t)$, alors $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$.*

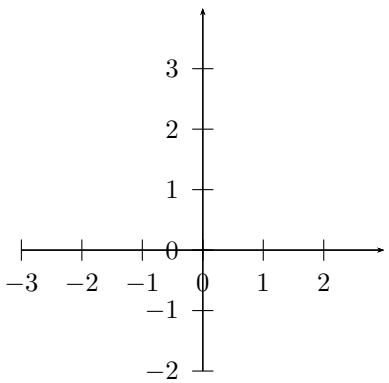
Interprétation géométrique.



Théorème 10.2 *Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et soit m et M un minorant et un majorant de f sur $[a;b]$.*
On a l'inégalité suivante :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq M(b-a).$$

Interprétation géométrique.

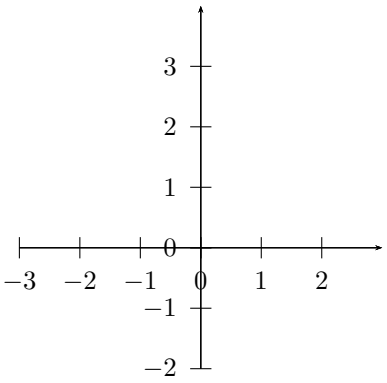


Théorème 10.3 *Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et soit a et b deux reéls distincts de $[a;b]$.*
Alors il existe un nombre réel $c \in [a;b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)dt \leq (b-a)f(c).$$

Le nombre $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est appelé ***valeur moyenne de*** *f entre a et b.*

Interprétation géométrique.



11 Calcul d'une intégrale à l'aide des primitives.

Théorème 11.1 *Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et soit a un réel de I.*
La fonction définie sur I par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f sur I telle que $F(a) = 0$.

DEMONSTRATION :

Théorème 11.2 *Soit f une fonction continue sur un intervalle I, F est une primitive quelconque de f sur I, soit a et b deux réels de I, alors on a :*

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

On écrit par commodité la différence $F(b) - F(a)$ sous la forme $[f(t)]_a^b$, on a donc :

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) = [f(t)]_a^b.$$

DEMONSTRATION :

Exemple(s) 11.1

1. $\int_0^1 (x^3 + x)dx =$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(u)du =$

3. $\int_1^{e^2} \frac{1}{x}dx =$

4. $\int_0^1 e^t dt =$

12 Intégration par parties.

Théorème 12.1 *Soit u et v sont deux fonctions **dérivables** sur un intervalle I, telles que leurs dérivées u' et v' soient continue sur I, alors pour tout réels a et b de I on a :*

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt.$$

DEMONSTRATION :

Exemple(s) 12.1