Sommes de variables aléatoires.

1 Sommes de variables aléatoires.

Définitions 1.1 ❒ *Soit X une variable aléatoire définie sur l'univers Ω et a un nombre réel.*
On peut définir une variable aléatoire Y telle que pour tout élément $\omega \in \Omega$, $Y(\omega) = a \times X(\omega)$. On note $Y = aX$.

❒ *Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même univers .*
On peut définir une variable aléatoire Z sur Ω telle que, pour tout élément $\omega \in \Omega$, $Z(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$.
Cette variable aléatoire est appelée somme des variables aléatoires X et Y. On note Z=X+Y.

Exemple(s) 1.1

2 Rappel : Loi de probabilité d'une variable aléatoire.

Définition 2.1 *Soit Ω un univers, toute fonction X définie sur Ω et à valeur dans $\mathbb{R}$, est appelée une* ***variable aléatoire****.*

$$X : \Omega \longmapsto \mathbb{R}.$$

Exemple(s) 2.1

Définition 2.2 *Soit X une variable aléatoire définie sur l'univers Ω, Notons I l'ensemble des valeurs de X, $I = \{x_1; x_2; ...; x_m\}$.*
*Considérons l'événement "**X prend la valeur** x_i", que l'on note $(X = x_i)$.*
A chaque événement $(X = x_i)$ on associe le nombre $p(X = x_i)$, c'est à dire la probabilité que X prenne la valeur x_i. La loi de probabilité de X est la suite des nombres :

$$\{p(X = x_1); p(X = x_2); ..., p(X = x_m)\}.$$

Définition 2.3 *Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω.*

1. *L'espérance Mathématique de X est le nombre réel, noté $E(X)$ et*

$$E(X) = x_1 \times p(X = x_1) + x_2 \times P(X = x_2) + ... + x_m \times p(X = x_m).$$

2. *La variance de X est le nombre réel, noté $V(X)$ et*

$$V(X) = (x_1 - E(X))^2 \times p(X = x_1) + (x_2 - E(X))^2 \times p(X = x_2) + ... + (x_m - E(X))^2 \times p(X = x_m).$$

3. *L'écart type de X est le nombre réel, noté $\sigma(X)$ et*

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Exemple(s) 2.2

Propriété 2.1

$$V(X) = \Sigma_{i=1}^{i=n} p_i x_i^2 - E(X)^2.$$

On peut aussi noter cela :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

3 Espérance et variance d'une somme de variables aléatoires.

Propriété 3.1 *Soient X et Y deux variables aléatoires définie sur le même univers Ω, alors :*

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y).$$

Démonstration :

Propriété 3.2 ❒ *Soient X et Y deux variables aléatoires définie sur un même univers Ω et a un nombre réel, alors :*

$$E(aX) = aE(X) \quad \text{et} \quad E(aX+bY) = aE(X) + bE(Y).$$

❒ *Soit X une variable aléatoire sur un univers Ω, pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a :*

$$V(aX) = a^2V(X).$$

Démonstration :

4 Variances d'une somme de variables aléatoires indépendantes.

Définition 4.1 *Soient X_1, X_2,..., X_n, n variables aléatoires à valeurs respectivement dans E_1, E_2,..., E_n.*
On dit que X_1, X_2,..., X_n sont indépendants lorsque, pour tous $x \in E_1$, $x \in E_2$,..., $x \in E_n$ nous avons :

$$P\Big((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2) \cap ... \cap (X_n = x_n)\Big) = P(X_1 = x_1) \times P(X_2 = x_2) \times ... \times P(X_n = x_n).$$

Propriété 4.1 *Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définie sur Ω, alors :*

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y).$$

5 Applications à la loi binomiale.

Définition 5.1 *Deux variables aléatoires sont dites identiquement distribuées lorqu'elles ont la même loi de probabilité.*

Propriété 5.1 ***(Admise)***
Toute variable aléatoire suivant une loi binomiale peut s'écrire comme une somme de variables aléatoires de Bernouilli indépendantes et identiquement distribuées.

Propriété 5.2 *Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p, alors :*

- ❒ $E(X) = np$.
- ❒ $V(X) = np(1 - p)$.
- ❒ $\sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}$.

Démonstration :

6 Echantillon de n variables aléatoires identiques et indépendantes.

Considérons un entier naturel $n \leq 1$ et X_1 ;... ;X_n, n variables aléatoires définies sur Ω supposées indépendantes et identiquement distribuées.
On note $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ la somme de ces n variables aléatoires et $M_n = \dfrac{X_1 + ... + X_n}{n}$, la moyenne de ces n variables aléatoires.

Propriété 6.1 *Pour tout $k \in \{1; ...; n\}$, on a :*

- ❒ $E(S_n) = nE(X_k)$.
- ❒ $V(S_n) = n \times V(X_k)$ *et* $\sigma(S_n) = \sqrt{n} \times \sigma(X_k)$.

Démonstration :

Propriété 6.2 *Pour tout $k \in \{1; ...; n\}$, on a :*

- ❒ $E(M_n) = E(X_k)$.
- ❒ $V(M_n) = \dfrac{V(X_k)}{n}$ *et* $\sigma(M_n) = \dfrac{\sigma(X_k)}{\sqrt{n}}$.

Démonstration :