Suites et raisonnement par récurrence.

1 Définitions et généralités sur les suites numériques.

Definition 1.1 *Une suite réelle* (u_n) *ou* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une liste infinie de nombres réels :*$u_0, u_1, u_2, \ldots.., u_n, \ldots..$
u_n *est le terme général de la suite.*

Remarque(s) 1.1 *Il y a deux maniéres possibles pour générer des suites de nombres.*

1. *Suites définies par la donnée explicite de leur termes.*
   Soit $\begin{array}{ccc} f:\mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ *une fonction définie sur* $\mathbb{R}$*, posons*
   $$\forall n \in \mathbb{N} \quad \boxed{u_n = f(n)}.$$
2. *Suites définies par recurrence.*
   Soit un sous ensemble $I \subset \mathbb{R}$ *et* $\begin{array}{ccc} f:I & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ *une fonction définie sur* I *telle que* $f(I) \subset I$ *Posons*
   $$u_0 = a \in I \quad et \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \boxed{u_{n+1} = f(u_n)}.$$
   On définie ainsi une suite de réels.

Exemple(s) 1.1 — *Si la fonction* f *est* $x \longmapsto x + r$ *alors la suite définie par recurrence grace à* f *est une suite arithmétique de raison* r*.*
— *Si la fonction* f *est* $x \longmapsto x \times q$ *alors la suite définie par recurrence grace à* f *est une suite géométrique de raison* q*.*

Exemple(s) 1.2

2 Etude de la monotonie des suites réelles.

Definition 2.1 — *Dire qu'une suite (u_n) est croissante signifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$,* $u_n \leq u_{n+1}$.
- *Dire qu'une suite (u_n) est strictement croissante signifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$,$u_n < u_{n+1}$.*
- *Dire qu'une suite (u_n) est décroissante signifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq u_{n+1}$.*
- *Dire qu'une suite (u_n) est strictement décroissante signifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > u_{n+1}$.*

- Méthode 1 : **Etudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.**
  - Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$, alors la suite est croissante.
  - Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$, alors la suite est décroissante.
  - Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n > 0$, alors la suite est strictement croissante.
  - Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n < 0$, alors la suite est strictement décroissante.
- Méthode 2 : $\boxed{\textbf{Si pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n > 0}$ **, on peut comparer le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ avec le nombre 1.**
  - Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, alors la suite est croissante.
  - Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$, alors la suite est décroissante.
  - Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, alors la suite est strictement croissante.'
  - Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, alors la suite est strictement décroissante.
- Methode 3 : **Etudier le sens de variation de la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.**
  - Si la fonction est croissante sur $[0; +\infty[$, alors la suite (u_n) est croissante.
  - Si la fonction est décroissante sur $[0; +\infty[$, alors la suite (u_n) est décroissante.
  - Si la fonction est strictement croissante sur $[0; +\infty[$, alors la suite (u_n) est strictement croissante.
  - Si la fonction est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante.

Exemple(s) 2.1

3 Suites majorés, suites minorés.

Definition 3.1 — *Dire qu'une suite réelle (u_n) est majoré, signifie qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$. Ce nombre M est appelé majorant de la suite (u_n).*
— *Dire qu'une suite réelle (u_n) est minoré, signifie qu'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq M$. Ce nombre m est appelé minorant de la suite (u_n).*
— *Dire qu'une suite réelle (u_n) est bornée si (u_n) est minorée et majorée, c'est à dire il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que $m \leq u_n \leq M$.*

Exemple(s) 3.1

4 Raisonnenents par récurrence.

Remarque(s) 4.1 ***Il est parfois difficile de prouver une propriété sur les termes d'une suite car on ne peut pas connaître la valeur de u_n en fonction de n, c'est le cas de beaucoup de suites définies par récurrence. On fait donc un raisonnement de "proche en proche" que l'on appelle raisonnement par récurrence.***
Shéma :

4.1 Découverte d'un raisonnement par récurrence.

Exercice 4.1 *Soit la suite (v_n) définie par $v_0 = 0$ et pour tout entier $n \geq 0$, $v_{n+1} = \sqrt{v_n + 2}$.*
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $0 \leq v_n \leq 2$.

Shema du raisonnement :

Rédaction mathématique du problème :

4.2 Principe du raisonnement par récurrence.

Pour démontrer par récurrence qu'une propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, on procède de la manière suivante :

- On vérifie que $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- On suppose que pour un entier naturel n quelconque , la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie, et on démontre que : $\boxed{\mathrm{P}_n \quad vraie \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}_{n+1} \quad vraie.}$
- CONCLUSION :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathcal{P}_n \quad est \;\; vraie.$$

Exemple(s) 4.1 *On pose* $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$ *où* n *est un entier naturel* $n \leq 1$.

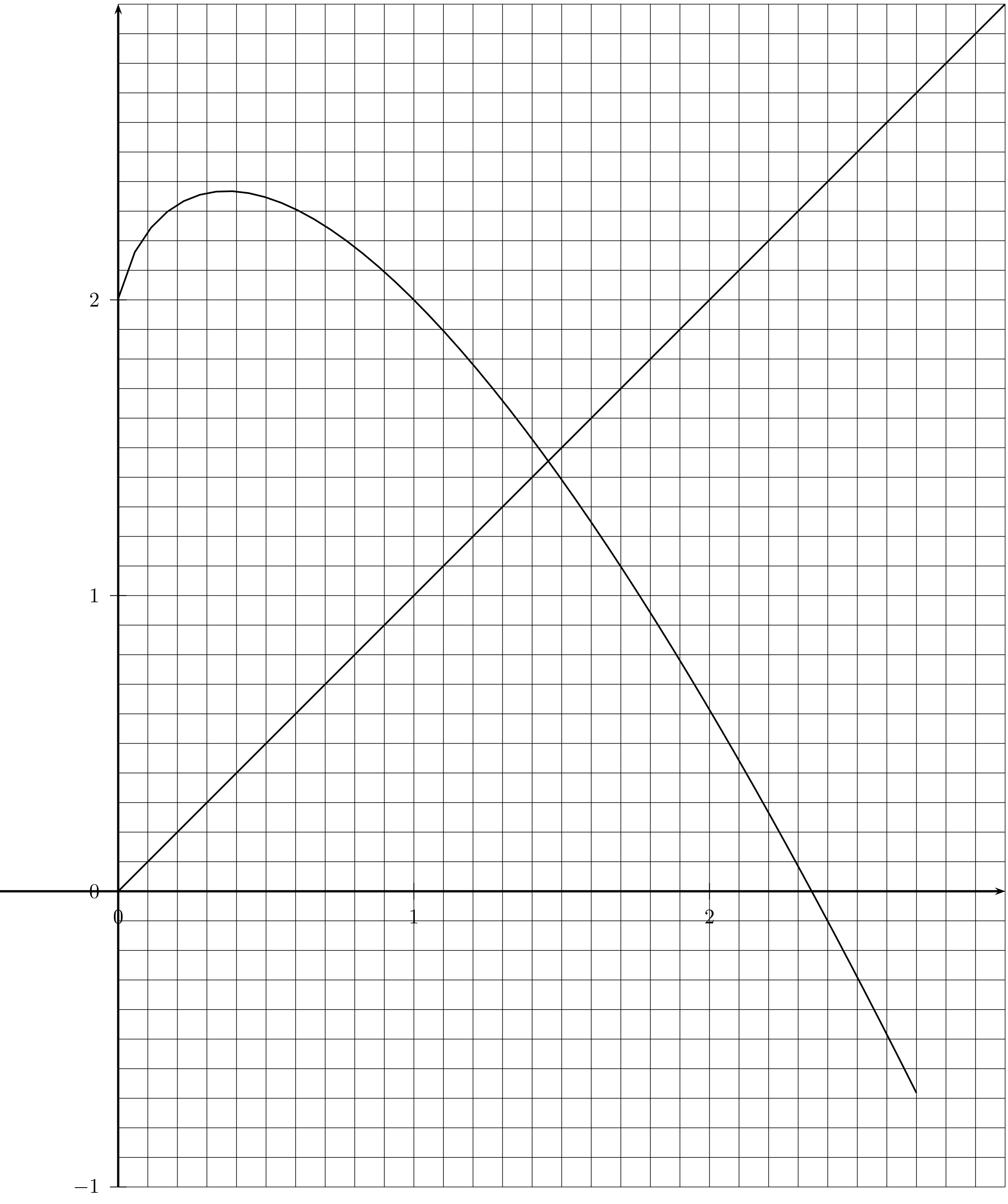
1. *Exprimer* S_{n+1} *en fonction de* S_n.
2. *Démontrer* ***par récurrence*** *que pour tout* $n \leq 1$, *on a :*

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

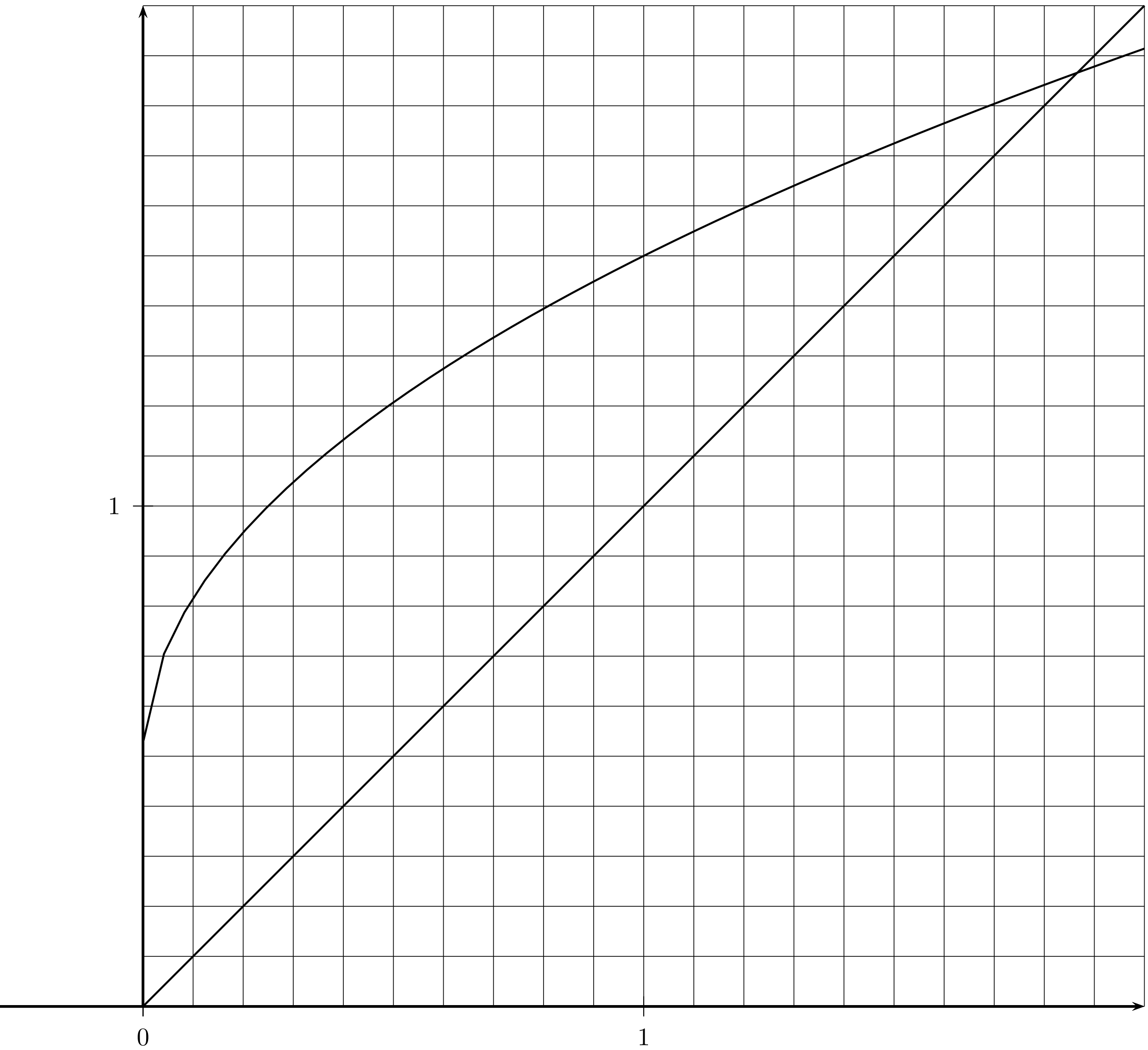
5 Construction géométrique des premiers termes d'une suite de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$.

Exemple1

Soit la suite définie par $u_0 = 1$ et soit la fonction f dont on connait la courbe représentative. Représenter u_1, u_2, u_3, u_4, u_5.



Exemple 2 :
Soit la suite définie par $u_0 = 0,1$ et pour tout $\in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = \sqrt{u_n} + 0.5$. Représenter u_1, u_2, u_3, u_4, u_6.



6 Suites et algorithmique.

6.1 Génération d'une suite avec un algorithme.

Exemple(s) 6.1 *Soit la suite* (u_n) *définie pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *par* $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 1}$ *et* $u_0 = 1$. *Déterminons l'algorithme permettant de donner tous les premiers termes de la suite jusqu'au rang demandé.*

```
from math import
u=1
n=int(input('Entrer le rang qui doit être affiché.'))
for i in range(n):
        u=sqrt(2u+1)

print('u',n,'=',u)
```

Commentaires :

Exemple(s) 6.2 *Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+2} = u_{n+1} - 2u_n$ et $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$. Déterminons l'algorithme permettant de donner tous les premiers termes de la suite jusqu'au rang demandé par l'utilisateur de l'algorithme.*

```
u=1
v=1
n=int(input('Entrer le dernier rang qui doit être affiché'))
print('u0=1');print('u1=1')
for i in range(2,n+1):
        v=v-2 u
        u=v
        print('u',i,'=',v)
```

Remarque(s) 6.1 ***En Python on a :***

```
for i in range(a,b):
```

$a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$ avec $a < b$. La variable $\boxed{i}$ prend les valeurs a, $a+1$,....,$b-1$.

1. Calculer u_2, u_3, u_4, u_5,...,u_9.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n = 1$ ou $u_n = -1$.