

Tableaux de signes et résolution d'inéquations.

I Exemple(s) d'inéquation produit.

Exemple 1 Soit l'inéquation $(2x - 4)(-x - 5) \leq 0$. On construit le tableau de signes de la façon suivante :

dans la première colonne, on met les différents facteurs de l'inéquation

pour déterminer les colonnes, on résout les équations

$$2x - 4 = 0 \iff x = 2$$

$$-x - 5 = 0 \iff x = -5$$

Enfin, on résout l'inéquation à partir du tableau de signes : on cherche les solutions négatives ou nulles

on place en abscisses les solutions des équations

x	$-\infty$	-5	2	$+\infty$		
$\boxed{2}x - 4$		$-$	$/$	$-$	0	$+$
$\boxed{-}x - 5$		$+$	0	$-$	$/$	$-$
$(2x - 4)(-x - 5)$		$\boxed{-}$	0	$+$	0	$\boxed{-}$

$$S =] -\infty ; -5] \cup [2 ; +\infty [.$$

Exemple 2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(2x - 1)^2 < (2x - 1)(x - 4)$:

$$\begin{aligned} \rightarrow (2x - 1)^2 < (2x - 1)(x - 4) &\iff (2x - 1)^2 - (2x - 1)(x - 4) < 0 \\ &\iff (2x - 1)[(2x - 1) - (x - 4)] < 0 \\ &\iff (2x - 1)(x + 3) < 0 \end{aligned}$$

$\rightarrow$ construction du tableau de signes :

x	$-\infty$	-3	$\frac{1}{2}$	$+\infty$		
$\boxed{2}x - 1$		$-$	$/$	$-$	0	$+$
$\boxed{1}x + 3$		$-$	0	$+$	$/$	$+$
$(2x - 1)(x + 3)$		$+$	0	$\boxed{-}$	0	$+$

$$\begin{aligned} \nearrow 2x - 1 = 0 &\iff x = \frac{1}{2} \\ \nearrow x + 3 = 0 &\iff x = -3 \end{aligned}$$

$\rightarrow$ Conclusion : on cherche les signes $-$ dans la dernière ligne d'où : $S =] -3 ; \frac{1}{2} [$

II Exemple(s) d'inéquation quotient.

On souhaite par exemple résoudre l'inéquation $\frac{-2x + 4}{x + 3} \geq 0$.

La seule différence avec l'inéquation produit, c'est qu'il faut faire attention à la valeur interdite : la valeur pour laquelle le dénominateur est nul.

Dans le tableau de signes, cela se traduit par une double barre au niveau des valeurs interdites

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$	
$\boxed{-2}x + 4$		+		+	0 -
$\boxed{1}x + 3$		-	0	+	+
$\frac{-2x+4}{x+3}$		-		$\boxed{+}$	0 -

$\searrow$
 $\nearrow$

$-2x + 4 = 0 \iff x = 2$
 $x + 3 = 0 \iff x = -3$

Enfin, on résout l'inéquation à partir du tableau de signes : on cherche les solutions positives ou nulles

$$\mathcal{S} =] -3 ; 2] .$$

Exemple 3 Résoudre l'inéquation $\frac{2x+3}{x-1} \leq \frac{4x}{2x-3}$.

➔ On commence par transformer l'expression de manière à n'avoir QUE des produits ou des quotient d'un côté, et un zéro de l'autre :

$$\begin{aligned}
 \frac{2x+3}{x-1} \leq \frac{4x}{2x-3} &\iff \frac{2x+3}{x-1} - \frac{4x}{2x-3} \leq 0 \\
 &\iff \frac{(2x+3)(2x-3) - 4x(x-1)}{(x-1)(2x-3)} \leq 0 \\
 &\iff \frac{4x^2 - 9 - 4x^2 + 4x}{(x-1)(2x-3)} \leq 0 \\
 &\iff \frac{4x-9}{(x-1)(2x-3)} \leq 0.
 \end{aligned}$$

➔ construction du tableau de signes :

x	$-\infty$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	$+\infty$				
$\boxed{4}x - 9$	$-$	$/$	$-$	$/$	$-$	0	$+$	$\nearrow$	$4x - 9 = 0 \iff x = \frac{9}{4}$
$\boxed{1}x - 1$	$-$	0	$+$	$/$	$+$	$/$	$+$	$\nearrow$	$x - 1 = 0 \iff x = 1$
$\boxed{2}x - 3$	$-$	$/$	$-$	0	$+$	$/$	$+$	$\nearrow$	$2x - 3 = 0 \iff x = \frac{3}{2}$
$\frac{4x - 9}{(x - 1)(2x - 3)}$	$-$	$//$	$+$	$//$	$-$	$\frac{3}{2}$	$+$		

➔ Conclusion : on cherche les solutions négatives ou nulles

$$\mathcal{S} =] -\infty ; 1 [\cup \left[\frac{3}{2} ; \frac{9}{4} \right[.$$