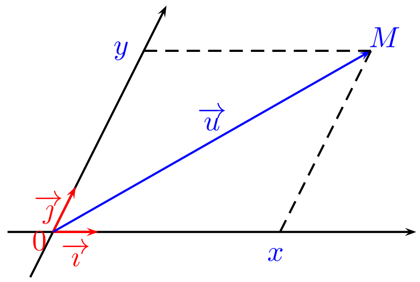
VECTEUR DANS UN REPERE.

I coordonnées d'un vecteur dans un repère quelconque.

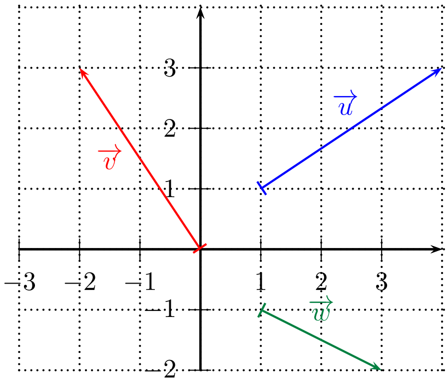
Dans le repère $(O; I; J)$, les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ sont les coordonnées de l'unique point M tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OM}$. On note cela par $\overrightarrow{u}(x; y)$ ou bien $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Remarque 1 *Bien souvent, on note $(O; \overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath})$ le repère $(O; I; J)$.*

Un repère peut ne pas être orthonormé, mais quelconque comme dans l'illustration ci-contre.



Exemple 1 Lire les coordonnées des vecteurs de la figure suivante :



On peut écrire $\overrightarrow{u}(3; 2)$ ou bien $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

On peut écrire $\overrightarrow{u}(-2; 3)$ ou bien $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

On peut écrire $\overrightarrow{u}(2; -1)$ ou bien $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Proposition 1 *Soient $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs et k un réel.*

- ***Egalité de deux vecteurs :***
  Deux vecteurs sont égaux si et seulement si leurs coordonnées sont égales
  $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} \iff \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$.
- ***Somme de deux vecteurs :***
  Le vecteur $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$. On peut aussi écrire $\overrightarrow{w}(x + x'; y + y')$.
- ***Produit d'un vecteur par un réel :***
  Le vecteur $\overrightarrow{w} = k\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$. On peut aussi écrire $\overrightarrow{w}(kx; ky)$.

Proposition 2 *Dans le repère $(O;I;J)$, on considère les points $A(x_A;y_A)$, et $B(x_B;y_B)$. Les Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont égales à $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$. On peut aussi écrire $(x_B - x_A; y_B - y_A)$*

Exemple 2 Soient les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix} 5a \\ 6b \end{pmatrix}$ alors :

- $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{w} \iff \begin{cases} 5a & = & 5 \\ 6b & = & 3 \end{cases}$

  $\iff \begin{cases} a & = & 1 \\ b & = & \frac{1}{2} \end{cases}$

- $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 1+5 \\ -3+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$

- $-\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

- $5\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 5\times 5 \\ 5\times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 15 \end{pmatrix}$

- $-\overrightarrow{u} + 5\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} -1+25 \\ 3+15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 18 \end{pmatrix}$

II Colinéarité de deux vecteurs

Proposition 3 *Les vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$ c'est à dire <u>les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont proportionnelles</u>.*

Exemple 3

- Les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sont colinéaires car $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{v}$. On considère les trois vecteurs du plan suivants : $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} -6 \\ 9 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix}$.
- Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires car $2\times 9 - (-3)\times(-6) = 18 - 18 = 0$,
- Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ ne sont pas colinéaires car $2\times(-7) - (-3)\times 5 = -14 + 15 = 1 \neq 0$.

Exemple 4 Soient quatre points $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ du plan.
Quelle est la nature du quadrilatère $ABDC$?

- $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 7-1 \\ 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$,
- $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix} 5-1 \\ 5-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$,
- $XY' - YX' = 6\times 2 - 3\times 4 = 0$.
  Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires,
  les droites (AC) et (BD) sont donc parallèles.
- De plus, $\overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{BD}$;
- donc : $\boxed{ABDC \text{ est un trapèze}}$