

TP3 :Algorithmique et fonctions composées.

Exercice 0.1

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (2x + 1)^2$

et la suite (v_n) définie par $\begin{cases} v_{n+1} = (2v_n + 1)^2 \\ v_0 = 1 \end{cases}$.

1. Donner en fonction de x l'expression de $(f \circ f)(x)$.

$$(f \circ f)(x) = f[f(x)] = (2(2x + 1)^2 + 1)^2 = (2(4x^2 + 4x + 1) + 1)^2 = (8x^2 + 8x + 3)^2 = 64x^4 + 128x^3 + 112x^2 + 48x + 9.$$

2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $v_{n+2} = (f \circ f)(v_n)$.

On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $v_{n+1} = f(v_n)$, donc on a : $v_{n+2} = (2v_{n+1} + 1)^2 = f(v_{n+1}) = f[f(v_n)] = (f \circ f)(v_n)$.

Exercice 0.2

Algorithm 1 :

```
1  VARIABLES
2  i EST_DU_TYPE NOMBRE
3  a EST_DU_TYPE NOMBRE
4  DEBUT_ALGORITHME
5  LIRE a
6  POUR i ALLANT_DE 1 A 2
7  DEBUT_POUR
8  a PREND_LA_VALEUR (a+1)*(a+1)
9  FIN_POUR
10 AFFICHER a
11 FIN_ALGORITHME
```

Algorithm 2 :

```
1  VARIABLES
2  i EST_DU_TYPE NOMBRE
3  a EST_DU_TYPE NOMBRE
4  DEBUT_ALGORITHME
5  LIRE a
6  a PREND_LA_VALEUR pow(a,4)+4*pow(a,3)+8*pow(a,2)+8*a+4
8  AFFICHER a
9  FIN_ALGORITHME
```

1. Si $a = 1$, quelle valeur retourne l'algorithme 1 et puis l'algorithme 2 ?

Algo 1 $a=1$, puis $a=2*2=4$, puis $a=5*5=25$

Algo 2 : $a=1$, $a = 1^4 + 4 \times 1^3 + 8 \times 1^2 + 8 + 4 = 1 + 4 + 8 + 8 + 4 = 25$.

2. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$ les deux algorithmes retourneront la même valeur.

l'agorithme 1 réalise $f \circ f(a)$ avec $f(a) = (a + 1)^2$.

Donc on a : $f(f(a)) = ((a+1)^2 + 1)^2 = (a^2 + 2a + 2)^2 = a^4 + 4a^3 + 8a^2 + 8a + 4$. Les algorithmes réalisent le même travail, ils retournent la même valeur pour un réel a donné.

Exercice 0.3

Algorithm 1 :

```

1  VARIABLES
2  i EST_DU_TYPE NOMBRE
3  a EST_DU_TYPE NOMBRE
4  DEBUT_ALGORITHME
5  LIRE a
6  POUR i ALLANT_DE 1 A 3
7  DEBUT_POUR
8  a PREND_LA_VALEUR (2*a+1)
9  FIN_POUR
10 AFFICHER a
11 FIN_ALGORITHME

```

1. Si $a = 2$, quelle valeur retourne l'algorithme 1 ?
 $a = 2$, donc a prend la valeur $2 * 2 + 1 = 5$, puis a prend la valeur $2 * 5 + 1 = 11$, puis a prend la valeur $2 * 11 + 1 = 23$. L'algorithme 1 retournera la valeur 23.
2. Compléter l'algorithme 2 pour qu'il travaille de la même façon que l'algorithme 1.
 si $f(a) = 2a + 1$, l'algorithme 1 retourne le valeur $f[f[f(a)]] = 2 \times f[f(a)] + 1 = 2 \times (2 \times f(a) + 1) + 1 = 2 \times (2 \times (2a + 1) + 1) + 1 = 2 \times (4a + 3) + 1 = 8a + 7$.

Algorithme 2 :

```

1  VARIABLES
2  a EST_DU_TYPE NOMBRE
3  DEBUT_ALGORITHME
4  LIRE a
5  a PREND_LA_VALEUR 8a+7
6  AFFICHER a
7  FIN_ALGORITHME

```

Exercice 0.4 Soit $p \in \mathbb{N}$ et $p \geq 2$, on note parfois $(f^p)(x) = (f \circ f \circ \dots \circ f)(x)$.

1. si $f(x) = x + 3$, exprimer $f^p(x)$ en fonction de x et de p ($p \geq 2$).
 $f(f(x)) = f(x) + 3 = (x + 3) + 3 = x + 6$. On par récurrence que : $(f^p)(x) = (f \circ f \circ \dots \circ f)(x) = x + 3p$ ($p \geq 2$).
2. Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = 3x + 1$, faire un algorithme permettant de calculer le nombre $(g^p)(1)$, le nombre p étant donné au départ par l'utilisateur.

```

1  VARIABLE
2  a EST_DU_TYPE NOMBRE
3  DEBUT_ALGORITHME
4  DEMANDER p
5  a=1
6  POUR i ALLANT_DE 1 A p
7  DEBUT_POUR
8  a PREND_LA_VALEUR (3*a+1)
9  FIN_POUR
10 AFFICHER a
11 FIN_ALGORITHME

```