Correction du devoir de Mathématique n 1

Donné le ...... pour le ....

Exercice 0.1 *On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{5u_n}{3u_n+5}$.*

1. *A l'aide d'un **tableur**, conjecturer sur les variations de la suite, laisser une trace de votre travail !* *On remarque la suite est décroissante, mais il faut le démontrer !*
2. *Démontrer par **récurrence** que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n > 0$.*
   - ❒ *Initialisation : $u_0 = 1 > 0$, la propriété est vraie au rang 0.*
   - ❒ *Transmission :HYP supposons qu'il existe un entier p tel que $u_p > 0$.*
     $u_p > 0 \Rightarrow 5u_p > 0$ et $3u_p + 5 \geq 5 > 0$, donc $\dfrac{5u_n}{3u_n+5} > 0$, donc $u_{p+1} > 0$, la propriété reste vraie au rang $p+1$.
   - ❒ *Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n > 0$.*
3. *Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.*

$$u_{n+1} - u_n = \frac{5u_n}{3u_n+5} - u_n = \frac{5u_n}{3u_n+5} - \frac{u_n(3u_n+5)}{3u_n+5} = \frac{5u_n - 3u_n^2 - 5u_n}{3u_n+5}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-3u_n^2}{3u_n+5}.$$

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{-3u_n^2}{3u_n+5} \leq 0$ car $u_n > 0$, donc la suite (u_n) est décroissante.

Exercice 0.2 *On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur $\mathbb{N}^\star$ par :*

$$u_1 = \frac{1}{2}, \quad \text{et, pour tout entier naturel } n \quad \text{non nul, } u_{n+1} = \frac{n+1}{2n}u_n.$$

1. *Calculer u_2, u_3 et u_4.*
   A faire c'est facile !
   (a) *Démontrer que pour tout entier naturel non nul, u_n est stictement positif.*
   - ❒ *Initialisation : $u_1 = \dfrac{1}{2} > 0$, la propriété est vraie au rang 1.*
   - ❒ *Transmission :HYP supposons qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^\star$ tel que $u_p > 0$.*
     Puisque $p \in \mathbb{N}^\star$, alors $p > 0$ et donc $\dfrac{p+1}{2p} > 0$, et de plus nous savons que $u_p > 0$.
     On en déduit que $\dfrac{p+1}{2p}u_p > 0$, donc $u_{p+1} > 0$,la propriété reste vraie au rang $p+1$.
   - ❒ *Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $u_n > 0$.*

   (b) *Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.*

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{2n}u_n - u_n = \frac{n+1}{2n} \times u_n - \frac{2n \times u_n}{2n} = \frac{nu_n + u_n - 2nu_n}{2n}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-nu_n + u_n}{2n} = \frac{(1-n)u_n}{2n}.$$

Nous savons que $n \geq 1$, et $u_n > 0$, donc $\dfrac{(1-n)u_n}{2n} \leq 0$.
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$, donc (u_n) est décroissante.

2. *Pour tout entier naturel n non nul, on pose :*

$$v_n = \frac{u_n}{n}.$$

   (a) *Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.*
   On précisera sa raison et son premier terme v_1.

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{n+1} = \frac{\frac{n+1}{2n}u_n}{n+1} = \frac{u_n}{2n} = \frac{1}{2} \times \frac{u_n}{n} = \frac{1}{2}v_n$$

   Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ on a $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$. La suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

$$v_1 = \frac{u_1}{1} = \frac{1}{2}.$$

   (b) *En déduire que pour tout entier naturel n non nul on a :$u_n = \frac{n}{2^n}$. La suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$, donc $v_n = v_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} = \frac{1}{2^n}$.*

$$v_n = \frac{u_n}{n} \Leftrightarrow u_n = n \times v_n \Leftrightarrow u_n = \frac{n}{2^n}.$$

Exercice 0.3 *Soit la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$, $u_2 = -5$ et pour tout $n \geq 1$ par $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.*

1. *Calculer u_3, u_4 et u_5. $u_3 = 5u_2 - 6u_1 = -25 - 6 = -31$.*
   $u_4 = 5u_3 - 6u_2 = 5 \times (-31) - 6 \times (-5) = -155 + 30 = -125$.
   $u_5 =$ etc....

2. *Démontrer que pour tout entier $n \geq 2$ on a :$u_n = 4 \times 2^n - 7 \times 3^{n-1}$.*

   ❒ *Initialisation : $u_1 = \frac{1}{2} > 0$, la propriété est vraie au rang 1.*

   ❒ *Transmission :HYP supposons qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^\star$ tel que :*
   $u_p = 4 \times 2^p - 7 \times 3^{p-1}$ et $u_{p+1} = 4 \times 2^{p+1} - 7 \times 3^p$.
   $u_{p+2} = 5u_{p+1} - 6u_p = 5(4 \times 2^{p+1} - 7 \times 3^p) - 6(4 \times 2^p - 7 \times 3^{p-1})$.
   $u_{p+2} = 10 \times 2^{p+2} - 35 \times 3^p - 12 \times 2^{p+1} + 14 \times 3^p$.
   $u_{p+2} = 10 \times 2^{p+2} - 6 \times 2^{p+2} - 21 \times 3^p = 4 \times 2^{p+2} - 7 \times 3^{p+1}$. ***On a supposé que la propriété était vraie aux rangs p et $p+1$, elle reste vraie au rang $p+2$.***

   ❒ *Conclusion : $n \geq 1$ on a $u_n = 4 \times 2^n - 7 \times 3^{n-1}$. On a supposé que la propriété était vraie aux rangs p et $p+1$, elle reste vraie au rang $p+2$.*