Correction du devoir de Mathématique n 8

Exercice 62 p 329

Exercice 0.1 ❒ $\displaystyle\int_{-1}^{2} 3x^2(5x^3-1)^2dx.$

Recherchons une primitive de $f(x) = 3x^2(5x^3-1)^2$*, si on pose* $u(x) = 5x^3-1$*,* $u'(x) = 15x^2$*. Donc pour tout* $x \in \mathbb{R}$*, on a* $f(x) = \dfrac{1}{5} \times u'(x) \times [u(x)]^2$*.*

Donc la fonction F*, définie par* $F(x) = \dfrac{1}{5} \times \dfrac{1}{3} \times [u(x)]^3 = \dfrac{(5x^3-1)^3}{15}$ *est un primitive de* f *sur* $\mathbb{R}$*.*

$$\int_{-1}^{2} 3x^2(5x^3-1)^2dx = \left[\frac{(5x^3-1)^3}{15}\right]_{-1}^{2} = 3969.$$

❒ $\displaystyle\int_{-2}^{1} e^{5x-1}dx.$

Recherchons une primitive de $f(x) = e^{5x-1}$*, si on pose* $u(x) = 5x-1$*,* $u'(x) = 5$*. Donc pour tout* $x \in \mathbb{R}$*, on a* $f(x) = \dfrac{1}{5} \times u'(x) \times e^{u(x)}$*.*

Donc la fonction F*, définie par* $F(x) = \dfrac{1}{5} \times e^{u(x)} = \dfrac{1}{5}e^{5x-1}$ *est un primitive de* f *sur* $\mathbb{R}$*.*

$$\int_{-1}^{2} e^{5x-1}dx = \left[\frac{1}{5}e^{5x-1}\right]_{-2}^{1} = \frac{1}{5}(e^4 - e^{-11}).$$

❒ $\displaystyle\int_{-2}^{3} \frac{3x}{\sqrt{2x^2+1}}dx.$

Recherchons une primitive de $f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{2x^2+1}}$*, si on pose* $u(x) = 2x^2+1$*,* $u'(x) = 4x$*. Donc pour tout* $x \in \mathbb{R}$ $u(x) > 0$ *et donc* $f(x) = \dfrac{3}{2} \times \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$*.*

Donc la fonction F*, définie par* $F(x) = \dfrac{3}{2} \times \sqrt{u(x)} = \dfrac{3}{2}\sqrt{2x^2+1}$ *est un primitive de* f *sur* $\mathbb{R}$*.*

$$\int_{-2}^{3} \frac{3x}{\sqrt{2x^2+1}}dx = \left[\frac{3}{2}\sqrt{2x^2+1}\right]_{-2}^{3} = \frac{3}{2}(\sqrt{19}-3)$$

❒ $\displaystyle\int_{0}^{2} e^x(5e^x+3)^2dx$

Recherchons une primitive de $f(x) = e^x(5e^x+3)^2$*, si on pose* $u(x) = 5e^x+3$*,* $u'(x) = 5e^x$*. Donc pour tout* $x \in \mathbb{R}$*, on a* $f(x) = \dfrac{1}{5} \times u'(x) \times [u(x)]^2$*.*

Donc la fonction F*, définie par* $F(x) = \dfrac{1}{5} \times \dfrac{1}{3} \times [u(x)]^3 = \dfrac{(5e^x+3)^3}{15}$ *est un primitive de* f *sur* $\mathbb{R}$*.*

$$\int_{0}^{2} e^x(5e^x+3)^2dx = \left[\frac{(5e^x+3)^3}{15}\right]_{0}^{2} = \frac{1}{15}((5e^2+3)^3 - 8^3) = \frac{1}{15}\left((5e^2+3)^3 - 512\right)$$

❒ $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{2}{(3-5x)^2}dx.$

Recherchons une primitive de $f(x) = \dfrac{2}{(3-5x)^2}$ *définie sur* $\mathbb{R} - \{\frac{3}{5}\}$*, si on pose* $u(x) = 3-5x$*,* $u'(x) = -5$*. Donc pour tout* $x \in \mathbb{R} - \{\frac{3}{5}\}$*, on a* $f(x) = -\dfrac{2}{5} \times u'(x) \times [u(x)]^{-2}$*.*

Donc la fonction F*, définie par* $F(x) = \dfrac{2}{5} \times [u(x)]^{-1} = \dfrac{2}{5(3-5x)}$ *est un primitive de* f *sur* $\mathbb{R} - \{\frac{3}{5}\}$*.*

$$\int_{1}^{2} \frac{2}{(3-5x)^2}dx = \left[\frac{2}{5(3-5x)}\right]_{1}^{2} = \frac{1}{7}.$$

❐ $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx.$

Recherchons une primitive de $f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$ *définie sur* $\mathbb{R}^\star$, *on remarque que* $f(x) = -(-\dfrac{1}{x^2}) \times e^{\frac{1}{x}}$.
Si on pose $u(x) = \dfrac{1}{x}$, $u'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$. *Donc pour tout* $x \in \mathbb{R}^\star$, *on a* $f(x) = -u'(x) \times e^{u(x)}$.
Donc la fonction F, *définie sur* $\mathbb{R}^\star$ *par* $F(x) = -e^{u(x)} = -e^{\frac{1}{x}}$ *est un primitive de* f *sur* $\mathbb{R}^\star$.

$$\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx = \Big[-e^{\frac{1}{x}}\Big]_1^2 = e - e^{\dfrac{1}{2}} = e - \sqrt{e}.$$