Correction du devoir surveillé de Mathématiques n 1 (TS)

Exercice 0.1 *Voici la somme des premiers termes d'une suite géométrique, donner le résultat de la somme* $1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+...+\frac{512}{19683}$ *sous forme d'une fraction irréductible :* *La* $S=u_0+u_1+...+u_n$ *avec* (u_n) *suite géométrique de raison* $\frac{2}{3}$*, et de premier terme* $u_0=1$*, donc pour tout* $n\in\mathbb{N}$ $u_n=u_0\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Recherchons l'entier n *pour que* $u_n=u_0\times\left(\frac{2}{3}\right)^n=\left(\frac{2}{3}\right)^n=\frac{512}{19683}$ *on obtient* $n=9$.

$S=u_0+...+u_9=\frac{1-(\frac{2}{3})^{10}}{1-\frac{2}{3}}=\frac{58085}{19683}$.

Exercice 0.2 *Soit la suite* (w_n) *définie pour tout* $n\in\mathbb{N}$ *par* $w_n=\frac{2^n}{4^{2n}}$.

1. *Montrer que la suite* (w_n) *est géométrique, donner la raison.*

   Pour tout $n\in\mathbb{N}$ *on a :* $\frac{w_{n+1}}{w_n}=\frac{\frac{2^{n+1}}{4^{2(n+1)}}}{\frac{2^n}{4^{2n}}}=\frac{2^{n+1}}{4^{2(n+1)}}\times\frac{4^{2n}}{2^n}=\frac{2^n\times2}{4^{2n}\times4^2}\times\frac{4^{2n}}{2^n}$

   Donc $\frac{w_{n+1}}{w_n}=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$*. Donc la suite est géométrique de raison* $\frac{1}{8}$.
2. *Etudier la monotonie de* (w_n)*.*

   Une suite géométrique de raison $\frac{1}{8}$ *est strictement décroissante.*

Exercice 0.3 *Soit la fonction* f *définie sur* $\mathbb{R}-\{-3\}$ *par* $f(x)=\frac{x+1}{x+3}$.

1. *Etudier les variations de* f*.*

   $f'(x)=\frac{(x+1)'\times(x+3)-(x+1)\times(x+3)'}{(x+3)^2}=\frac{2}{(x+3)^2}$*. Pour tout* $x\in\mathbb{R}-\{-3\}$ *on a* $f'(x)>0$*, donc on a que* f *est strictement croissante sur* $]-\infty;-3[$ *et* f *est strictement croissante sur* $]-3;+\infty[$
2. *En déduire un encadrement de* $f(x)$ *lorsque* $x\in[0;1]$*.*

   Comme f *est strictement croissante sur* $]-3;+\infty[$*, on a* $0\leq x\leq1\Rightarrow f(0)\leq f(x)\leq f(1)$*.* *Donc* $\frac{0+1}{0+3}\leq f(x)\leq\frac{1+1}{1+3}\Rightarrow\frac{1}{3}\leq f(x)\leq\frac{1}{2}$.
3. *Soit* (u_n) *la suite définie par* $u_0=1$ *et pour tout* $n\in\mathbb{N}$ *par* $u_{n+1}=\frac{u_n+1}{u_n+3}$*.* *Démontrer que pour tout* $n\in\mathbb{N}$ $0\leq u_n\leq1$*.*

   - *Initialisation : si* $n=0$ *on a* $0\leq u_0\leq1$*, donc la propriété est vrai au rang* $n=0$*.*
   - *Transmission :Hp Supposons qu'il existe un entier naturel* p *tel que* $0\leq u_p\leq1$*.*
     $u_{p+1}=f(u_p)$*, or nous savons que si* $0\leq x\leq1\Rightarrow\frac{1}{3}\leq f(x)\leq\frac{1}{2}$*.*
     Donc $u_{p+1}\in[\frac{1}{3};\frac{1}{2}]\subset[0;1]$*. La proriété reste donc vraie au rang* $p+1$*.*
   - *Conclusion : pour tout* $n\in\mathbb{N}$ *on a :*$0\leq u_n\leq1$*.*

Exercice 0.4 *Soit* (u_n) *la suite définie par* $u_0 = 3$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *par* $u_{n+1} = 2u_n - 1$.
Montrer en utilisant un ***raisonnement par récurrence*** *que pour tout entier naturel* n *on a :*

$$u_n = 2^{n+1} + 1.$$

- ❒ *Initialisation : si* $n = 0$ *on a* $= 2^{n+1} + 1 = 2^{0+1} + 1 = 3$*, or* $u_0 = 3$*, donc la propriété est vrai au rang* $n = 0$.
- ❒ *Transmission :Hp Supposons qu'il existe un entier naturel* p *tel que* $u_p = 2^{p+1} + 1$.
  $u_{p+1} = 2u_n - 1 = 2 \times (2^{p+1} + 1) - 1 = 2^{p+2} + 2 - 1 = 2^{p+2} + 1$.
  La proriété reste donc vraie au rang $p + 1$.
- ❒ *Conclusion : pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on a :*$u_n = 2^{n+1} + 1$.

Exercice 0.5 *Soit la suite* (u_n) *définie sur* $\mathbb{N}$ *par :* $u_0 = 8$ *et* $u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 3$.
Démontrer en utilisant un ***raisonnement par récurrence*** *que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on a :*

$$u_n = 3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n + 5.$$

- ❒ *Initialisation : si* $n = 0$ *on a* $3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n + 5 = 3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^0 + 5 = 3 + 5 = 8$*, or* $u_0 = 8$*, donc la propriété est vrai au rang* $n = 0$.
- ❒ *Transmission :Hp Supposons qu'il existe un entier naturel* p *tel que* $u_p = 3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^p + 5$.
  $u_{p+1} = \frac{2}{5}u_p + 3 = \frac{2}{5} \times (3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^p + 5) + 3 = 3 \times \frac{2}{5} \times \left(\frac{2}{5}\right)^p + \frac{2}{5} \times 5 + 3 = 3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^{p+1} + 5$.
  La proriété reste donc vraie au rang $p + 1$.
- ❒ *Conclusion : pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on a :*$u_n = 3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n + 5$.

Exercice 0.6 *Le premier janvier 2000, un client a placé 3000 euros à intérêts composés au taux annuel de 2,5 %.*

On note C_n *le capital du client au 1*[er] *janvier de l'année* $2000 + n$*, où* n *est un entier naturel.*

1. *Calculer* C_1 *et* C_2*. Arrondir les résultats au centime d'euro.*
   $C_1 = C_0 \times 1,025 = 3075$ *et* $C_2 = C_1 \times 1,025 = 3151,87$
2. *Exprimer* C_{n+1} *en fonction de* C_n*. En déduire que, pour tout nombre entier naturel* n*, on a la relation :*

$$C_n = 3000 \times 1,025^n.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$*, on a* $C_{n+1} = C_n \times 1,025$*, donc la suite est géométrique de raison* $1,0125$.
Donc $C_n = C_0 \times (1,025)^n = 3000 \times (1,025)^n$.