Correction : Révision fonction exponentielle.

Exercice 0.1

Simplifier les expressions suivantes.

$A = e^{2x} \times e^{-x} = e^{x}$

$B = e^{x} + 3e^{x} - e^{5} \times e^{x-5} = 3e^{x}$

$C = e^{x3} \times e^{-3x} = e^{0} = 1$

$D = \left(e^{x} \times e^{-2x}\right)^{5} = (e^{-x})^{5} = e^{-5x}$

$E = e^{3x+2} \times e^{1-2x} = e^{x+3}$

$F = \left(\dfrac{e^{2x-1}}{e^{-2x}}\right)^{2} = \left(e^{4x-1}\right)^{2} = e^{8x-2}$

Exercice 0.2 *Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} + e^{x} - 2$.*

1. *Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.*
   $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$, *donc* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
   $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0$, *donc* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -2$.
2. *Etudier les variations de f.*
   $f'(x) = 2e^{2x} + e^{x}$. *Or nous savons que pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $e^{x} > 0$ *et* $e^{2x} > 0$, *donc* $f'(x) > 0$. *Donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.*
3. *Tracer $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f et les asymptotes éventuelles.* *Utiliser geogebra.*
4. *Etudier l'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses.*
   Résolvons l'équation $f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2x} + e^{x} - 2 = 0$.
   Posons $X = e^{x}$, *l'équation* $e^{2x} + e^{x} - 2 = 0$ *est donc équivalente à* $X^{2} + X2 = 0$. $\Delta = 1^{2} - 4 \times 1 \times (-2) = 9 > 0$.
   Donc $X_0 = \dfrac{-1+3}{2} = 1$ *et* $X_1 = \dfrac{-1-3}{2} = -2$. *Donc on a :*$e^{x} = 1$ *ou* $e^{x} = -2$.
   $e^{x} = -2$ *est impossible et* $e^{x} = 1 \Leftrightarrow x = 0$. *Donc la courbe* $\mathcal{C}_f$ *coupe l'axe des abscisse au point O d'abscisse* 0.

Exercice 0.3 *Calculer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de chacune des fonctions f définies par les expressions données.*

❒ $f(x) = 3xe^{x}$

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$, *donc* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

❖ *d'aprés le cours :* $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x} = 0$, *donc* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

❒ $f(x) = \dfrac{e^{x}-2}{e^{x}+1}$

❖ *Nous sommes en présence d'une FI*$\frac{\infty}{\infty}$.

$$f(x) = \frac{e^{x}-2}{e^{x}+1} = \frac{e^{x}(1-\frac{2}{e^{x}})}{e^{x}(1+\frac{1}{e^{x}})} = \frac{(1-\frac{2}{e^{x}})}{(1+\frac{1}{e^{x}})}.$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (1 - \frac{2}{e^{x}}) = 1$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} (1 + \frac{1}{e^{x}}) = 1$, *donc* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

❖ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, *donc* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x-2}{e^x+1} = -2$.

❒ $f(x) = \dfrac{x-2}{e^x+1}$

❖ *Nous sommes en présence d'une* $FI\frac{\infty}{\infty}$.

$f(x) = \dfrac{x-2}{e^x+1} = \dfrac{x(1-\frac{2}{x})}{x(\frac{e^x}{x}+\frac{1}{x})} = \dfrac{(1-\frac{2}{x})}{(\frac{e^x}{x}+\frac{1}{x})}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\frac{2}{x}) = 1$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{e^x}{x}+\frac{1}{x}) = +\infty$, *donc* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

❖ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, *donc* $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x+1 = 1$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} x-2 = -\infty$, *donc* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

❒ $f(x) = x+3+xe^x$

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+3) = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, *donc* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

❖ *Nous savons que d'aprés le cours* $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+3) = -\infty$, *donc* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

❒ $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2+1}$

❖ *Nous sommes en présence d'une* $FI\frac{\infty}{\infty}$.

$f(x) = \dfrac{e^x}{x^2+1} = \dfrac{e^x}{x^2} \times \dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 1$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

❖ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+1 = +\infty$, *donc* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

❒ $f(x) = x+1+\dfrac{3}{e^x+1}$

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty} x+1 = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{e^x+1} = 0$, *donc* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

❖ $\lim\limits_{x\to-\infty} x+1 = -\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3}{e^x+1} = 3$, *donc* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Exercice 0.4 *Soit la fonction définie dans* $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = x-2+\dfrac{1}{e^x}$.

1. *Calculer les limites de* f *en* $-\infty$ *et* $+\infty$.

   $\lim\limits_{x\to+\infty} x-2 = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$, *donc* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

   $\lim\limits_{x\to-\infty} x-2 = -\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x} = +\infty$. *Nous sommes en présence d'une* $FI\frac{\infty}{\infty}$.

   En factorisant par x *on a* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

2. *Etudier les variations de* f, *et tracer la courbe représentative* $\mathcal{C}$ *de* f.

   $f(x) = x-2+e^{-x}$, *donc* $f'(x) = 1-e^{-x}$.

   $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow 1-e^{-x} \leq 0 \Leftrightarrow e^{-x} \geq 1 \Leftrightarrow -x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$

   $f(0) = 0-2+\dfrac{1}{1} = -1$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 0.5 *Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \dfrac{1-e^x}{1+e^x}$, et on désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f (unité graphique 2cm).*

1. *Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :*

$$f(x) = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x+1} = x - 1 + \frac{2}{e^x+1}.$$

$$x + 1 - \frac{2e^x}{e^x+1} = x + \frac{e^x+1}{e^x+1} - \frac{2e^x}{e^x+1} = x + \frac{1-e^x}{1+e^x} = f(x).$$
$$x - 1 + \frac{2}{e^x+1} = x - \frac{e^x+1}{e^x+1} + \frac{2}{e^x+1} = x + \frac{1-e^x}{1+e^x} = f(x).$$

2. *Calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.*

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty} x - 1 = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{e^x+1} = 0$, *donc* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

❖ $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1-e^x}{1+e^x} = \dfrac{1-0}{1+0} = 1$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$, *donc* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

3. *Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f'(x) = \dfrac{1+e^{2x}}{(1+e^x)^2}$.*
Etudier les variations de la fonction f.

❖ $f'(x) = 1 + \dfrac{-e^x(1+e^x) - e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^2} = 1 + \dfrac{-2e^x}{(1+e^x)^2} = \dfrac{1+e^{2x}}{(1+e^x)^2}$.

❖ *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $e^{2x} > 0$ et $e^x > 0$, donc $f'x) > 0$, donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.*

4. *Tracer la courbe $\mathcal{C}$.*
Utiliser Geogebra.