Travail en distanciel-semaine3/4 : Géométrie vectorielle dans l'espace.

Exercice 0.1 *On considère trois points de l'espace A, B et C non alignés et les points M et N définis par :* $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{BN} = 3\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}$.

- ❒ *Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CN}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.*

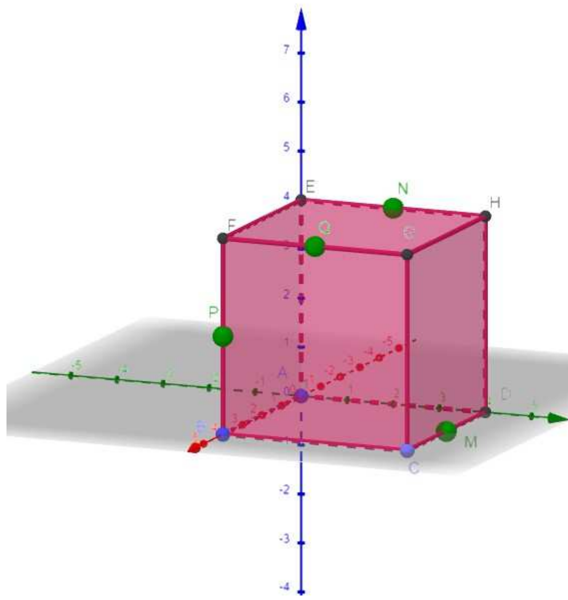
  $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

  $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$

- ❒ *En déduire que les points C, M et N sont alignés.*

  On remarque que $\overrightarrow{CN} = -2\overrightarrow{CM}$, donc les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CN}$ sont colinéaires, donc les points C, M et N sont alignés.

Exercice 0.2 *On considère un cube $ABCDEFGH$ et les milieux M, N, P et Q respectivement des segments $[CD]$, $[EH]$, $[BF]$ et $[GH]$. Donner les coordonnées des vecteurs suivants dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.*
$\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{AQ}$, $\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{CN}$, $\overrightarrow{EM}$, $\overrightarrow{NQ}$.



$$\overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{AQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} x_P - x_M \\ y_P - y_M \\ z_P - z_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-0.5 \\ 0-1 \\ 0.5-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -1 \\ 0.5 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{CN} = \begin{pmatrix} x_N - x_C \\ y_N - y_C \\ z_N - z_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-1 \\ 0.5-1 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -0.5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{EM} = \begin{pmatrix} x_M - x_E \\ y_M - y_E \\ z_M - z_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5-0 \\ 1-0 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{NQ} = \begin{pmatrix} x_Q - x_N \\ y_Q - y_N \\ z_Q - z_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-0 \\ 0.5-0.5 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 0.3 *Dans l'espace muni d'un repère, on donne les points suivants $A(1;-2;3)$, $B(-1;2;0)$, $C(3;1;-2)$, $D(0;-1;1)$ et $E(2;0;-1)$. Déterminer les coordonnées des vecteurs suivants.*

- ❒ $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CE}$ $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 2(-1-1)+(2-3) \\ 2(2-(-2))+(0-1) \\ 2(0-3)+(-1-(-2)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}$

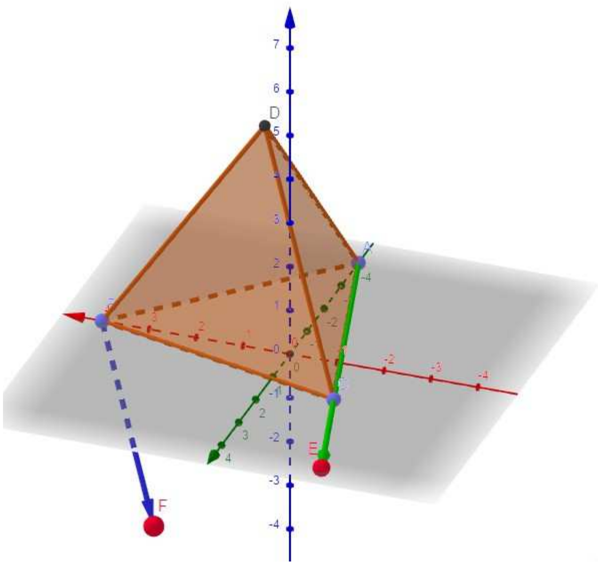
- ❒ $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AD} - 3\overrightarrow{BC}$ $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} -13 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

- ❒ $\overrightarrow{w} = -2\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{EA}$ $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

❒ $\vec{t} = 3\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{DC}$ $\vec{t} = \begin{pmatrix} -9 \\ -11 \\ 18 \end{pmatrix}$

Exercice 0.4 ***Savoir tracer une figure.***
$ABCD$ est un tétraèdre.

- ➜ *Réaliser une figure.*
- ➜ *Placer les points E, F, G et H définis par :*
  - ▼ $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{BF} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{CD}$.



  - ▼ $\overrightarrow{GA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD}$ *et* $\overrightarrow{CH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$.

Exercice 0.5 *Dans un repère de l'espace, on donne les points :*
$A(2;-1;4)$, $B(3;2;-5)$ *et* $C(-11;-40;121)$. *Ces points sont-ils alignés ?*

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 2-(-1) \\ -5-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \\ z_C - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11-2 \\ -40-(-1) \\ 121-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ -39 \\ 117 \end{pmatrix}$$

On a : $\overrightarrow{AC} = -13\overrightarrow{AB}$, *donc* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ *sont colineaires,* A, B *et* C *sont alignés.*

Exercice 0.6 *Dans un repère de l'espace, on donne les points :*
$A(-4;-3;1)$, $B(0;3;-5)$ *et* $C(2;1;1)$ *et* $D(3;5;-5)$.
Les droites (AC) *et* (BD) *sont-elles parallèles ?*

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \\ z_C - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-(-4) \\ 1-(-3) \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} x_D - x_B \\ y_D - y_B \\ z_D - z_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-0 \\ 5-3 \\ (-5)-(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a : $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{BD}$, *donc* $\overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{BD}$ *sont colineaires. Les droites* (AC) *et* (BD) *sont parallèles.*

Exercice 0.7 $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ *est un repère de l'espace.*
On donne les points : $A(-2;1;0)$, $B(1;3;5)$ *et* $C(15;20;25)$.

- ❒ *Calculer les coordonnées des vecteurs* $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-(-2) \\ 3-1 \\ 5-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \\ z_C - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15-(-2) \\ 20-1 \\ 25-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 19 \\ 25 \end{pmatrix}.$$

- ❒ *Le point* C *appartient-il à la droite* (AB) *?*

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colineaires, A, B et C ne sont pas alignés, donc C n'appartient pas à la droite (AB).

Exercice 0.8 *On donne les points :* $A(1;0;3)$, $B(3;-1;2)$ *et* $M(x;y;-2)$. *Existe-t-il des réels* x *et* y *tels que les points* A, B *et* M *soient alignés ?*

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ -1-0 \\ 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} x_M - x_A \\ y_M - y_A \\ z_M - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ -2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ -5 \end{pmatrix}.$$

A, B et M sont alignés $\Leftrightarrow$ les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colineaires. Or la seule possibilité est que $\overrightarrow{AM} = 5\overrightarrow{AB}$. Donc $x-1=10$ et $y=-5$, donc $x=11$ et $y=5$.