# GÉOMÉTRIE VECTORIELLE

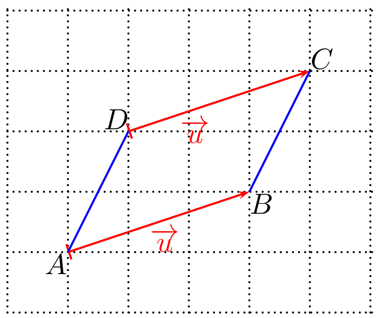
## I Translations et vecteurs.

**Definition I.1** ➤ *Un point $C$ est l'image d'un point $D$ par la <u>translation</u> qui transforme $A$ en $B$ lorsque le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.*

➤ *On dit alors que $C$ est l'image du point $D$ par la translation de <u>vecteur</u> $\overrightarrow{AB}$.*

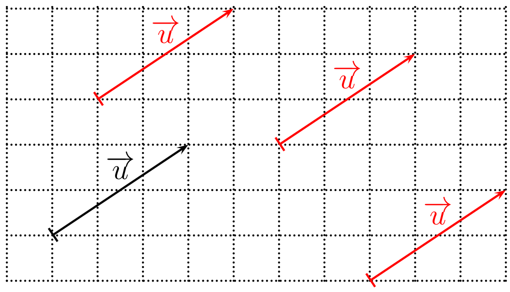
Soit la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ transformant $D$ en $C$.
Nous avons les propriétés suivantes:

- $(AB)$ et $(DC)$ sont parallèles (même direction),
- $AB$ et $DC$ sont de même longueur,
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ vont dans le même sens.




Les vecteurs seront souvent notés $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$...

**Remarque(s) I.1** *Le vecteur $\overrightarrow{u}$ n'est pas fixe, on peut le dessiner n'importe où sur une feuille :*




## II Égalité de deux vecteurs.

**Definition II.1** *Soit quatre points $A$, $B$, $C$ et $D$ du plan.*
*les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont <u>égaux</u> signifie que $D$ est l'image de $C$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. On note $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.*

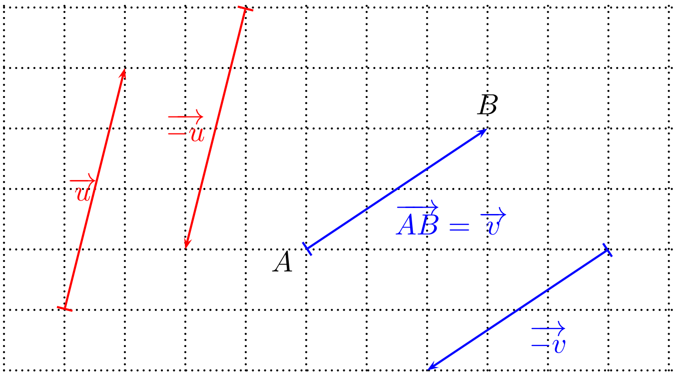
**Proposition II.1** *Soit quatre points $A$, $B$, $C$ et $D$ du plan:*

➤ *les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont <u>égaux</u> si et seulement si le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme (éventuellement aplati).*

➤ *les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont <u>égaux</u> si et seulement si les segments $[AC]$ et $[BD]$ ont même milieu.*

## III Opposé d'un vecteur

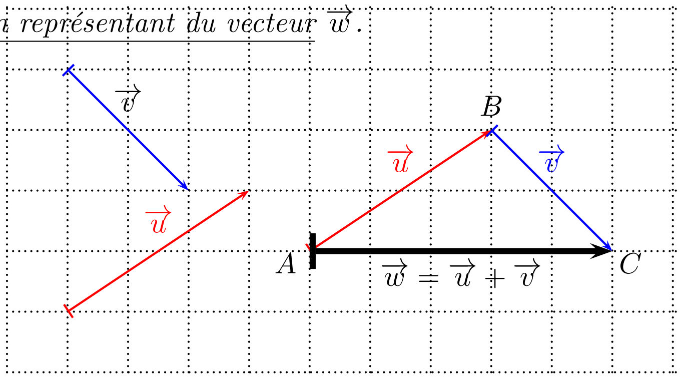
**Definition III.1** *Quels que soient les points $A$ et $B$, le vecteur $\overrightarrow{BA}$ est appelé vecteur opposé au vecteur $\overrightarrow{AB}$.*
*Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, alors $-\overrightarrow{u} = \overrightarrow{BA}$.*




## IV Somme de deux vecteurs.

**Definition IV.1** *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs.*
*La somme des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, notée $\boxed{\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}}$, est le vecteur associée à la translation résultant de l'enchaînement des translations de vecteur $\overrightarrow{u}$ et de vecteur $\overrightarrow{v}$.*

**Méthode(s) IV.1** *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs, on construit le vecteur $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ de la façon suivante :*
*Soit $A$ un point du plan, on trace le représentant de $\overrightarrow{u}$ d'origine $A$ : il a pour extrémité $B$, puis on trace le représentant de $\overrightarrow{v}$ d'origine $B$ : il a pour extrémité $C$.*
*Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est un représentant du vecteur $\overrightarrow{w}$.*




**Definition IV.2** $\boxed{\textbf{\textit{Le vecteur nul }} \overrightarrow{0}\textbf{.}}$

- *$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$ si et seulement si $A = B$,*
- *Si on fixe un point $O$, alors pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$, il existe un unique point $M$ vérifiant $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OM}$.*

**Proposition IV.1**

- ➤ ***Relation de Chasles :*** *Pour tous points $A$, $B$ et $C$ du plan, on a* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
- ➤ *Nous avons la relation* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ *si et seulement si $ABCD$ est un parallélogramme.*

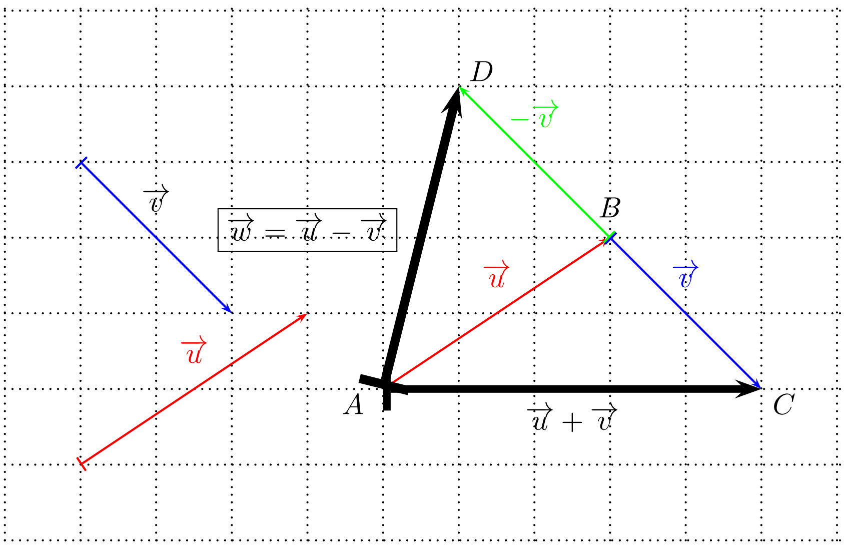
*Quels que soient les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ du plan, on a :*

- ♦ $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$,
- ♦ $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$,
- ♦ $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{u}$.

# V Différence de deux vecteurs.

**Definition V.1** *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs.*
*La différence des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, notée* $\boxed{\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}}$, *est le vecteur égal à la somme* $\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{v})$.

**Méthode(s) V.1** *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs, on construit le vecteur $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ de la façon suivante :*
*Soit $A$ un point du plan, on trace le représentant de $\overrightarrow{u}$ d'origine $A$ : il a pour extrémité $B$, puis on trace le représentant de $-\overrightarrow{v}$ d'origine $B$ : il a pour extrémité $D$.*
*Le vecteur $\overrightarrow{AD}$ est un représentant du vecteur $\overrightarrow{w}$.*



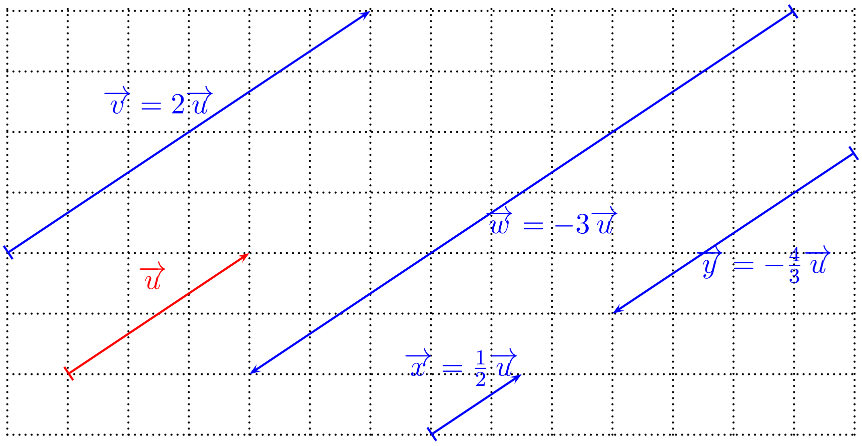

**Remarque(s) V.1** *Bien sur nous avons la relation:*

$$\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}.$$

## VI Multiplication d'un vecteur par un nombre réel.

**Definition VI.1** *Soit $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ un vecteur <u>non nul</u> et $\boxed{k}$ un réel non nul, on définit le vecteur $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AC}$ par :*

- *$A$, $B$ et $C$ sont alignés,*
- *si $\boxed{k > 0}$, $AC = kAB$ et $B$ et $C$ sont du même côté par rapport à $A$,*
- *Si $\boxed{k < 0}$, $AC = -kAB$ et $B$ et $C$ sont de part et d'autre de $A$.*
- *Si $\overrightarrow{u} = 0$ ou $\boxed{k = 0}$ alors $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$*




**Proposition VI.1** *Quels que soient les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et les réels $k$ et $l$ , on a :*

- $k(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = k\overrightarrow{u} + k\overrightarrow{v}$
- $(k + l)\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{u} + l\overrightarrow{u}$
- $k(\lambda\overrightarrow{u}) = (k\lambda)\overrightarrow{u}$
- $k\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \iff k = 0$ *ou* $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$

## VII Colinéarité de deux vecteurs

**Definition VII.1** *Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont <u>colinéaires</u> s'il existe un réel $k$ non nul tel que $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$.*

**Proposition VII.1**

- *Trois points $A$, $B$ et $C$ sont <u>alignés</u> si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont <u>colinéaires</u>,*
- *deux droites $(AB)$ et $(CD)$ sont <u>parallèles</u> si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont <u>colinéaires</u>.*